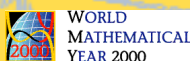


2000, année mondiale des mathématiques	2
Les nouvelles relations des mathématiques avec la société	3
Histoire des mathématiques : quel enjeu pour nos sociétés ?	5
Les mathématiques : un langage universel pour les scientifiques ?	7
Un certain penchant pour la recherche mathématique	9
Mathématiques et musique	11
Théorie des « probabilités libres »	13
Actualités de l'infini	15
Le théorème de Fermat	
La conjecture de Taniyama-Weil enfin démontrée !	17
Formules et nombres premiers	19
La mathématique des interfaces aléatoires	21
De l'infiniment petit à l'infiniment grand	23
Mathématique et physique : un inséparable tandem	25
« Tourbillonnez, turbulences ! »	27
Simulation numérique de la turbulence	29
Les mystères de la voûte céleste	33
Mathématiques et biologie sont-elles en harmonie ?	35
A, T, G, C : une simulation moléculaire pour quelques bases d'ADN	37
Comprendre le comportement mécanique de l'os humain grâce au calcul scientifique	39
Modéliser l'intelligence collective des insectes sociaux	41
L'écologie mathématique	43
Sécurité des logiciels	45
Le client est-il toujours roi ?	47
Galerie de portraits	49



2000, ANNÉE MONDIALE DES MATHÉMATIQUES

2000, ANNÉE MONDIALE DES MATHÉMATIQUES

Sur proposition de Jacques-Louis Lions, membre de l'Académie des Sciences, alors président de l'Union mathématique internationale, l'UNESCO a accordé son patronage à une « déclaration de Rio » (mai 1992) décidant que l'an 2000 serait l'« Année mondiale des mathématiques » pour :

- formuler les grands défis mathématiques pour le XXI^e siècle ;
- analyser les interactions entre mathématiques et développement (relations entre mathématiques et éducation, mathématiques et applications industrielles, économiques, politiques) ;
- recadrer l'image des mathématiques auprès du grand public.

Le CNRS participe à cette initiative de diverses manières : soutien à des colloques, réalisation de spots télévisuels, publication d'un numéro des *Images des Mathématiques* et ce numéro spécial de *CNRS-Info*.

Il présente les travaux de chercheurs de laboratoires de tous les départements scientifiques du CNRS et pose de nombreuses questions : quel est le rôle des mathématiques dans la société ? Les mathématiques sont-elles utiles ? Vivantes ? Participent-elles au progrès ?

Ces questions ont-elles le même sens aujourd'hui qu'hier ? Seront-elles pertinentes demain ? Les mathématiques et la physique sont-elles inséparables ? La biologie est-elle tributaire des mathématiques pour son développement ? Peut-on compter les nombres premiers ? Les nombres entiers forment-ils un réservoir inépuisable de complexité ? Existe-t-il des lois mathématiques pour le comportement mécanique de l'os humain ? La démonstration complète de la conjecture de Taniyama-Weil a suivi la démonstration du théorème de Fermat : faut-il espérer la réalisation du programme de Langlands ? Quel est ce programme ? Quelle est son histoire ?

Les mathématiques ont une unité. C'est cette cohérence que chaque esprit veut saisir à sa manière et en son temps. Chacun des textes présentés ici est un témoignage individuel et ce numéro de *CNRS-Info* montre la diversité des points de vue, le dynamisme des mathématiciens et des utilisateurs des mathématiques.

Christian PESKINE

*Directeur scientifique adjoint pour les mathématiques
au département des sciences physiques et mathématiques du CNRS.*

Michel ENOCK

Chargé de mission du département des sciences physiques et mathématiques du CNRS.

ADRESSE DU SERVEUR DE L'« ANNÉE MONDIALE DES MATHÉMATIQUES »

EN ANGLAIS :

<http://wmy2000.math.jussieu.fr>

EN FRANÇAIS :

<http://acm.emath.fr/amm>

ADRESSE DU SERVEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE :

<http://www.ens.fr/math2000>

ADRESSE DU SERVEUR DU DÉPARTEMENT DES SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES DU CNRS :

<http://www.spm.cnrs-dir.fr>

Jean EISENSTAEDT

Chargé de mission au département des sciences physiques et mathématiques du CNRS.

LES NOUVELLES RELATIONS DES MATHÉMATIQUES AVEC LA SOCIÉTÉ

Les mathématiciens sont déjà, et seront de plus en plus confrontés à la nécessité d'élargir la conception qu'ils ont de leur discipline et de la façon de la pratiquer. À cela, il y a des raisons purement internes : le mélange des genres mathématiques devient souvent la clef pour obtenir des résultats nouveaux. Il en va ainsi du rapprochement inattendu de la géométrie et des statistiques, de la théorie quantique des champs et de la géométrie algébrique, de la géométrie à courbure négative et de la complexité, etc.

Cette motivation interne est bien loin d'être la seule : nous vivons une époque où, avec l'installation d'une société partiellement délocalisée et dominée par les grands systèmes, les domaines de la vie sociale où des mathématiques interviennent de façon non triviale (mais néanmoins le plus souvent cachée) sont de plus en plus nombreux. Ce phénomène est reconnu par les industriels et les entrepreneurs les plus dynamiques.

En réalité nous assistons à une prolifération de nouveaux domaines d'interaction pour les mathématiciens. Certains sont de nature scientifique (les partenaires potentiels viennent comme c'était traditionnel de la physique sous beaucoup de formes ou de l'économie, mais aujourd'hui aussi de la biologie, de la chimie, demain de la médecine) ; certains sont plus directement technologiques. Nombreux sont aujourd'hui les produits de l'industrie ou des services qui incorporent de façon essentielle des mathématiques, et ceci vaut de la finance au système de navigation GPS, du scanner à la conception de la sécurité des voitures.

Beaucoup de ces terrains d'aventure requièrent un réel investissement avant que naisse une modélisation pertinente préalable à la mise en œuvre de techniques mathématiques diverses, mais il s'agit souvent de définir de nouveaux concepts et de nouveaux outils. Les défis issus de la structuration et de l'organisation de la masse gigantesque de données venant du séquençage du génome en sont un superbe exemple. Ces nouvelles frontières méritent d'être explorées, mais force est de constater que les documents à leur propos sont rares, et circulent mal. La variété et la diversité de ces situations méritent plus de publicité, et justifient plus de curiosité.

Un enjeu premier est bien entendu la préparation des étudiants. Force est de reconnaître que les étudiants d'aujourd'hui devront utiliser leur savoir, enrichi d'une expérience de terrain, dans des situations dont la plupart de leurs professeurs n'ont pas idée. Ils évolueront dans un environnement où des logiciels les plus divers seront d'utilisation quotidienne. Cette situation est largement nouvelle, et les mathématiciens ne s'y sont pas bien préparés. Ils doivent prendre garde qu'un repliement frileux sur des terres bien balisées, rejetant assez arbitrairement hors des mathématiques des champs en réalité purement mathématiques (comme l'automatique ou la combinatoire pour n'en citer que deux), vaudra simplement un « désaisissement » de ces domaines en expansion, et l'ignorance de nouveaux défis, qui à juste titre attireront des étudiants curieux.

Sur le fond, cet élargissement ne dispense pas les mathématiciens de leurs obligations traditionnelles, à savoir expliquer inlassablement comment des questions apparemment gratuites se révèlent finalement apporter les réponses à d'autres questions que l'on ne se posait pas au moment où ces méthodes sont apparues (par exemple les ellipses et leur usage en mécanique céleste ou les nombres complexes et leur usage dans la théorie des fonctions), et répéter jusqu'à l'épuisement ce qu'est la véritable signification de l'abstraction.

La cohérence de l'édifice mathématique provoque toujours l'étonnement, mais penser ou faire croire qu'il est achevé serait une erreur dramatique car ce serait nier que les mathématiques sont une science et une science bien vivante, une double vérité souvent cachée.

Contact chercheur :
Jean Pierre BOURGUIGNON.
*Institut des hautes études
scientifiques,*
CNRS,
mél : jpb@ihes.fr

**Contact département
des sciences physiques
et mathématiques du CNRS :**
Frédérique LAUBENHEIMER,
tél. : 01 44 96 42 63
mél : frederique.laubenheimer@
cnrs-dir.fr

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES : QUEL ENJEU POUR NOS SOCIÉTÉS ?

2000, année des mathématiques. 2000, année des bilans. Au croisement de ces deux conjonctures, une question s'impose : quels bouleversements le XX^e siècle a-t-il provoqué dans nos idées sur l'histoire des mathématiques ? Ils sont radicaux en ce qui concerne la formation des mathématiques de l'époque moderne. Pourtant, les vieux schémas résistent. C'est une invitation à se demander comment ces anciennes représentations du passé des mathématiques se sont mises en place et propagées, quels milieux les ont produites ou reproduites. Ces questions constituent désormais l'un des chantiers des historiens du XXI^e siècle.

Nous avons hérité du XIX^e siècle une vision de l'histoire des mathématiques qui peut s'énoncer en quelques formules qui ont fait fortune : « Miracle grec », « Moyen Age », « Renaissance », « Époque moderne ». Dans chacun de ces cas, la formule renvoie à une conception d'une époque qui déborde largement les simples mathématiques. Cependant, les mathématiques ont joué un rôle dans la formation de telles représentations de ces diverses périodes du passé : qui niera, par exemple, l'importance des *Éléments de géométrie* d'Euclide aux yeux de ceux qui souscrivirent à l'idée d'un « miracle grec » ? Selon cette vision, puissamment promue par le XIX^e siècle, l'histoire des mathématiques se déroulait essentiellement en Occident. L'Inde et la Chine étaient censées n'y avoir contribué que de manière marginale et s'être cantonnées à la pratique du calcul sans pouvoir s'élever au niveau de la théorie. De même, le monde arabe était supposé n'avoir fait que transmettre, en le tronquant et en le déformant, l'héritage grec, sans guère y apporter d'ajout fondamental. Autant d'idées que le XX^e siècle a radicalement contredites.

Faisant écho aux changements dans le monde autour d'eux, les historiens ont en effet défriché, au cours du siècle dernier, des territoires qui appellent à repenser ces cadres. Les premières traductions, à partir de la fin du XIX^e siècle, des documents mathématiques égyptiens retrouvés ont permis de poser la question de l'influence concrète - explicitement mentionnée par des auteurs comme Platon -, des développements égyptiens sur les mathématiques de l'Antiquité grecque. Le XX^e siècle a, de plus, assisté à la reconstitution des mathématiques et de l'astronomie babyloniennes grâce au déchiffrement de tablettes vieilles de près de 4 000 ans, exhumées par les archéologues. Deux grandes sources potentielles de la science grecque ressortaient ainsi du néant, et les conséquences de leur mise au jour sur notre compréhension de l'Antiquité demeurent un des grands chantiers de l'histoire des mathématiques à venir. C'est au XX^e siècle encore, en grande partie sous l'impulsion de Joseph Needham (Cambridge), que l'Occident prend vraiment connaissance des mathématiques, et plus largement des sciences et des techniques, que la Chine avaient développées par le passé. Enfin, toujours au XX^e siècle, des continents entiers de la mathématique produite en arabe au Moyen Age sont ressortis du fin fond des bibliothèques, et Roshdi Rashed* a beaucoup œuvré pour les porter à la connaissance des chercheurs contemporains.

Sans qu'il soit nécessaire de poursuivre l'énumération de la masse de matériaux et de faits nouveaux que les historiens ont dégagés au cours du siècle dernier, on comprend combien les conceptions du passé des mathématiques héritées du XIX^e siècle s'en trouvent mises à mal. Comment peut-on encore parler de Renaissance en mathématiques, quand l'Europe ne faisait que marcher sur les traces des savants arabes du Moyen Age ? Et comment parler de Moyen Age obscur quand les mêmes mathématiciens arabes s'avèrent avoir à l'époque ouvert des chantiers qu'on croyait caractéristiques de l'Europe moderne ? Pourtant ces idées perdurent, indice de ce qu'elles jouent un rôle dans le monde d'aujourd'hui. Éclairer par une analyse socio-politique la solidarité entre des représentations du passé et des enjeux contemporains, ... cette tâche qui incombe aux historiens est essentielle pour nos sociétés.

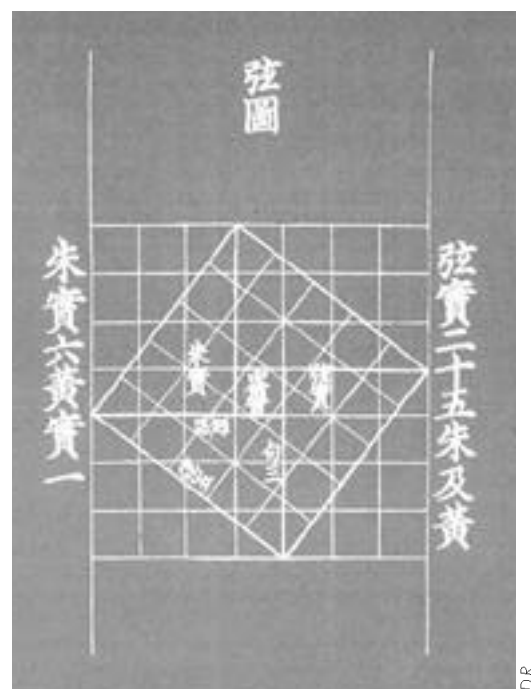


Figure prélevée dans le plus ancien imprimé mathématique à avoir survécu, réalisé en 1213. Elle accompagne l'algorithme sous la forme duquel se présente le théorème de Pythagore en Chine ancienne.

* Roshdi RASHED est directeur de recherche au CNRS au centre d'histoire des sciences et des philosophies arabes et médiévales (CNRS-EPHE-Université Paris 7).

Quelle représentation autre pourrait servir de cadre aux recherches du XXI^e siècle sur les mathématiques du passé ?

Une première constatation s'impose : les différentes sociétés anciennes qu'il nous est donné d'observer ont élaboré diverses manières de « faire des mathématiques », des conceptions du réel mathématique distinctes. C'est d'ailleurs une invitation à constater la variété des pratiques mathématiques qui ont cours dans nos sociétés elles-mêmes.

Second point : dans des textes, produits par ces diverses traditions, où une lecture mathématique reconnaîtrait le *même concept* d'aujourd'hui (par exemple, une équation), une analyse historique plus fine distingue des *objets différents*. Voilà un matériau intéressant pour penser à la nature des êtres mathématiques. Un matériau que seule une analyse conceptuelle informée peut élaborer, là où la lecture rétrospective du mathématicien, écrasant les différences, masque la variété culturelle des mathématiques. La perte en serait double : on manquerait à voir comment des pratiques différentes des mathématiques se sont imprimées dans les concepts et les résultats qu'elles produisent. Mais, et surtout, voyant partout le même, on se priverait des moyens de restituer l'apport de milieux variés à l'histoire des mathématiques.

Troisième point : ce n'est pas seulement pour contempler la diversité concrète de formes qu'un objet mathématique a pu revêtir par le passé que cette distinction doit se faire. L'identification de ces différentes formes est nécessaire pour écrire l'histoire de la constitution du savoir mathématique contemporain : dans le cas des équations, évoqué plus haut, c'est par une suite de synthèses survenues entre des concepts distincts élaborés dans des sources babyloniennes, grecques, chinoises, arabes, que l'objet *équation*, tel qu'on le connaît, fut produit. Deux conclusions s'ensuivent. Tout d'abord, certains objets fondamentaux des mathématiques d'aujourd'hui ont été constitués par l'articulation de concepts différents de ce qui fut par la suite construit comme même. Ensuite, ce n'est qu'en ayant séparé les divers ingrédients et en ayant restitué la multiplicité de leurs origines, que l'on peut appréhender la dynamique réelle des savoirs.

Nos sources appellent donc à renoncer à une conception linéaire, simplement cumulative, purement occidentale, du passé des sciences, au profit d'une représentation autre : une représentation qui donnerait toute leur place aux pratiques, aux productions mathématiques des sociétés et des milieux les plus divers, une représentation qui mettrait en valeur comment objets et résultats modernes sont tissés d'ingrédients venant d'un peu partout de la planète. Élaborer de telles conceptions du passé qui montrent comment s'articulèrent les apports des diverses communautés dans la formation de nos savoirs, ce n'est pas seulement rendre justice à ce que nous apprennent les sources mises au jour au XX^e siècle. Ce n'est pas seulement se mettre en position de réfléchir aux processus qui ont présidé à la constitution du savoir moderne. C'est également élaborer une histoire des mathématiques appropriée pour le monde contemporain.

Références :

- CNRS-Info, n° 371, 02/99, pp 9-10. *Algorithmes et démonstrations en Chine ancienne*.
- K. Chemla. *De la synthèse comme moment dans l'histoire des mathématiques* Diogène, 160, 1992, p. 97-114.
- K. Chemla. *Algebraic Equations East and West until the Middle Ages*. In : K. Hashimoto et al. (éds), *East Asian Science : Tradition and Beyond*, Kansai University Press, Osaka, 1995, pp. 83-89.
- Otto Neugebauer. *The Exact Sciences in Antiquity*. Seconde édition, Brown University Press, 1957, republiée à New York, par Dover Publications, 1969. Traduction française (P. Souffrin) : *Les sciences exactes dans l'Antiquité*, Arles, Actes Sud, 1990.
- Joseph Needham. *Science and Civilisation in China*. Cambridge University Press, 7 volumes, 1954.
- Roshdi Rashed. Sharaf al-Din al-Tusi : *Œuvres mathématiques. Algèbre et géométrie au XII^e siècle*. 2 tomes, Paris, Les Belles Lettres, 1986.

Contact chercheur :
Karine CHEMLA.
*Recherches en épistémologie
 et en histoire des sciences
 et des institutions scientifiques
 (REHSEIS),*
 CNRS-Université Paris 7,
 mél : chemla@paris7.jussieu.fr

**Contact département
 des sciences de l'homme
 et de la société du CNRS :**
Annick TERNIER,
 tél. : 01 44 96 43 10
 mél : annick.ternier@cnrs-dir.fr

LES MATHÉMATIQUES : UN LANGAGE UNIVERSEL POUR LES SCIENTIFIQUES ?

Dans un langage, chaque mot a deux composantes, le « signifié » et le « signifiant ». C'est de la différence entre ces deux composantes que naît l'ambiguïté de tout langage, et c'est de la confusion ainsi créée que surgissent lapsus et jeux de mots. C'est également cette nuance entre « signifié » et « signifiant » qui autorise les métaphores et les métonymies, sources incontestables de la poésie... Rien de semblable en mathématiques, où nulle distinction de ce genre n'est à faire. Il n'y a, en mathématiques, que du « signifiant ».

Les mathématiques ne sont pas un langage au sens strict du terme. Les mathématiciens, comme tout le monde, pensent et écrivent dans leur langue (majoritairement aujourd'hui, en anglais, même s'il est toujours possible d'écrire et de publier des articles en français dans des revues internationales, américaines ou japonaises...) et, de ce fait, les articles ont leur part d'ambivalence. Traditionnellement, dans un texte mathématique, ce qui est écrit en langage « mathématique » est écrit en italique (l'élément a d'un ensemble E) pour le distinguer de ce qui est écrit en français - ou en anglais - par exemple le mot « a » dans l'expression « il y a ».

Pourquoi les mathématiques sont-elles utilisées par les (autres) scientifiques ? Face à un problème à résoudre, le scientifique organise et classe. Pour rendre le problème plus clair et donc plus simple, il le rend plus abstrait : il construit un modèle mathématique censé retranscrire plus ou moins fidèlement cette réalité. Un modèle est d'autant plus pertinent qu'il décrit correctement la réalité et permet d'en rendre compte.

Mais le modèle mathématique établi suscite toujours de nouvelles interrogations, purement mathématiques cette fois. Et le problème s'inverse : ces questions ne sont plus posées par la volonté d'appréhender et de comprendre la réalité mais par la nécessité de résoudre un problème mathématique abstrait.

Y A-T-IL UN ÉPISTÉMOLOGISTE
DANS LA SALLE POUR ÉTUDIER PLUS
À FOND CETTE PROBLÉMATIQUE ?

Michel ENOCK,
chargé de mission au département
des sciences physiques
et mathématiques (SPM), CNRS

Contact département
des sciences physiques et
mathématiques du CNRS :
Frédérique LAUBENHEIMER,
tél. : 01 44 96 42 63
mél : frederique.laubenheimer@
cnrs-dir.fr

UN CERTAIN PENCHANT POUR LA RECHERCHE MATHÉMATIQUE

De l'usage de la statistique dans les autres disciplines scientifiques

Son leitmotiv : communiquer, vulgariser, former. Gérard Grancher, ingénieur de recherche statisticien, a su mettre ses connaissances au service de différents laboratoires (en médecine, biologie, métallurgie, physique et chimie). Il a collaboré avec des petites et moyennes entreprises de divers secteurs (agro-alimentaire, machine-outils). Il est lauréat de la promotion 1998 du Cristal* du CNRS (Cf *CNRS-Info* n° 376, juillet 1999). Interview :

— Comment êtes-vous devenu ingénieur-mathématicien ?

Il y a presque 20 ans, Jean-Pierre Raoult, fondateur de notre laboratoire**, avait réussi à persuader le département scientifique « Mathématiques et physique de base » de l'époque d'intégrer des ingénieurs dans les laboratoires de mathématiques. Leur mission principale : aider les scientifiques relevant d'autres disciplines à mettre en œuvre des techniques mathématiques (statistiques essentiellement) indispensables pour mener à bien leur recherche. J'avais alors un doctorat en statistique et, fort de mon expérience de traitement de données expérimentales, je fus choisi pour occuper ce poste.

La micro-informatique en était encore à ses premiers balbutiements et je passai beaucoup de temps à écrire des programmes qui permettaient non seulement de réaliser des calculs fastidieux, mais surtout de représenter graphiquement les résultats. Je me suis rendu compte assez vite que la demande qui, en caricaturant un peu, s'exprimait souvent sous la forme : « Voici mes données, qu'en faire maintenant ? », cachait en réalité des besoins plus profonds. Le choix de la technique statistique employée devrait se faire en amont, c'est-à-dire dès la conception même de l'expérience. Mais pour que l'expérimentateur puisse choisir l'instrument approprié, il lui faut connaître l'offre des statisticiens-mathématiciens.

Vingt années se sont écoulées et la culture statistique a heureusement beaucoup évolué et est mieux partagée, même si des progrès restent à faire.

— Qu'est-ce qui a changé en vingt ans ?

Les outils ont changé. Aujourd'hui, tous les biologistes ou physiciens disposent de micro-ordinateurs ou de terminaux, ont accès à des logiciels performants et souvent d'utilisation aisée qui leur offrent de multiples possibilités. Ils ont appris à les maîtriser. Pourtant, ils restent parfois « conservateurs » et hésitent encore à se servir de nouvelles méthodes pourtant mieux adaptées à leur problème. On peut, par exemple, s'étonner que les estimations lisses des densités (méthode du noyau) n'aient pas encore supplanté l'usage des histogrammes. Traditionnellement, on représente une distribution (la répartition des salaires par exemple) par un histogramme. Pour cela, il faut « mettre en classes ». Le choix des classes est arbitraire. L'histogramme dessiné dépend de ce choix. Les estimations lisses des densités (méthode du noyau) n'ont pas cet inconvénient, mais elles ne sont pas réalisables à la main ; même si le calcul en est relativement simple, l'usage de l'ordinateur (ou d'une calculatrice graphique) s'avère indispensable. Cette technique peut servir dès que les observations appartiennent à un ensemble continu (revenus, tailles des individus, etc. par opposition aux nombres d'enfants par famille...). Au cours de la dernière décennie, plusieurs thèses soutenues dans mon laboratoire ont porté sur les qualités statistiques de l'estimation des densités par la méthode du noyau.

— Il existe de multiples logiciels de plus en plus achevés. Alors, a-t-on vraiment encore besoin de « têtes pensantes » mathématiciennes ?

Les logiciels ne sont pas seulement plus performants, ils sont aussi de plus en plus complexes. Le problème de l'utilisateur est maintenant de savoir les choisir et de prendre du recul avant d'émettre des conclusions. L'utilisation de ces logiciels comme une boîte noire dont on ignore les principes, n'est pas sans danger. Il est toujours possible de trouver une courbe parmi des centaines de familles qui passent par des points observés. Mais après ? Quelle fiabilité peut-on accorder aux résultats ? Les logiciels ont encore d'énormes progrès à faire dans ce domaine.

** Le Cristal du CNRS, créé en 1992, distingue chaque année des ingénieurs, techniciens et personnels administratifs du CNRS. La communauté scientifique récompense celles et ceux qui, par leur créativité, leur maîtrise technique et leur esprit innovant, exercent le métier d'accompagnement de la recherche et contribuent à l'avancée des savoirs et des découvertes scientifiques.*

*** Le laboratoire de probabilités et statistique est devenu laboratoire d'analyse et modèles stochastiques et s'appelle actuellement laboratoire de mathématiques Raphaël-Salem.*

Il faut aussi recourir à la modélisation pour approfondir, comprendre et aller au-delà de la simple description de phénomènes. Et là, les mathématiques sont et seront toujours indispensables.

La collaboration entre mathématiciens et expérimentateurs n'est réellement efficace que si elle s'inscrit dans une démarche pluridisciplinaire ne réduisant ni le mathématicien à un simple prestataire de service, ni l'expérimentateur à un simple fournisseur de données.

— **Pourriez-vous décrire très brièvement vos activités actuelles au laboratoire ?**

Actuellement, mon activité de recherche pure n'est pas très importante (par manque de temps principalement). Dans mon unité de recherche, j'assume la fonction d'ingénieur système et de webmaster; la fonction de correspondant de formation permanente.

Cette activité n'est pas très spécifique aux mathématiques si ce n'est par l'usage de logiciels dédiés aux mathématiques: LaTeX, saisie et impression de textes mathématiques; Maple ou Mathematica, calculs formels; Splus, calculs statistiques; atlab, scilab, calculs numériques.

Depuis quelques années, je mène des actions de vulgarisation des mathématiques auprès du grand public (conférences dans les universités du troisième âge ou du temps libre, Semaine de la science, émissions de radio) ou en accompagnement de l'exposition *Maths 2000* (collaboration avec le CCSTI de Haute-Normandie). Année mondiale des mathématiques oblige, cette activité a pris de l'ampleur cette année.

Contact chercheur :
Gérard GRANCHER.
Laboratoire de mathématiques
Raphaël-Salem,
CNRS-Université de Rouen,
mél : Gerard.Grancher@
univ-rouen.fr

Contact département
des sciences physiques
et mathématiques du CNRS :
Frédérique LAUBENHEIMER,
tél. : 01 44 96 42 63
mél : frederique.laubenheimer@
cnrs-dir.fr

MATHÉMATIQUES ET MUSIQUE

Le lien entre les mathématiques et la musique est l'un des thèmes de la philosophie. Cette affinité trouve sa source dans le système de Pythagore qui relie l'arithmétique fondamentale non seulement aux composants de base du son (en particulier les sons émis par une corde vibrante) mais en fait à toutes les parties de l'Univers comme les planètes et les étoiles.

Pendant des siècles, la vision du monde héritée des Grecs anciens et répandue par le christianisme a dominé toute la culture scientifique de l'Europe occidentale. Elle présentait l'énorme avantage de proposer un système unifié du monde, gouverné par des lois simples qui pouvaient être vues comme des preuves de la rationalité divine. Tout l'enseignement de la science chrétienne médiévale semble pouvoir se résumer comme suit : la raison est la part de Dieu dans l'homme. Avec l'aide de la raison, l'homme est capable d'arracher au chaos apparent l'ordre caché de la Création. Sur la magnifique rose allégorique du transept nord de la cathédrale de Laon, dite « rose des Arts Libéraux », les artistes du Moyen Âge ont représenté la théologie entourée de sa cour dont arithmétique, géométrie et musique sont membres.

Cependant, de sérieuses ruptures sont vite apparues dans un système trop parfait et donc trop rigide. Lentement, mais comme une conséquence inévitable de ces brèches, les mathématiques et la musique se sont mis à suivre des voies séparées. Néanmoins, le poids de l'héritage culturel était si lourd que ses effets étaient encore perceptibles longtemps après la séparation entre les musiciens et la science pure. De grands scientifiques comme Kepler, Euler ou Lagrange se sont intéressés à la musique d'un point de vue scientifique et ont cherché à la comprendre par des systèmes formels.

Les dernières tentatives pour trouver des explications scientifiques unifiées pour la musique au XIX^e siècle ont rapidement tourné court. Certaines d'entre elles étaient astucieuses, mais la plupart furent grossières, comme le remarque Laurent Fichet dans son ouvrage *Les théories scientifiques de la musique aux XIX^e et XX^e siècles* (éd. Vrin, 1996). Le système dodécaphonique de Schönberg et l'École de Vienne dans les années 1920 peuvent être également vus comme une quête de théorie unificatrice. Le fameux cycle de conférences prononcées par Webern en 1932 (*Chemins de la musique nouvelle*) démontre, par un choix ciblé d'exemples, que le système dodécaphonique inclut toute la musique précédemment écrite. Même si avec le recul, cette opinion est aujourd'hui contestable, il n'en reste pas moins qu'en consacrant officiellement la rupture avec le système tonal, le dodécaphonisme a marqué un tournant réel qui a mené à la musique d'aujourd'hui : il a ouvert la porte à l'idée que chaque compositeur est libre de choisir son propre système de composition. Et, à ce stade, de nouveaux liens avec les sciences et en particulier les mathématiques ont vu le jour pour réfléchir à des plates-formes de raisonnement formel sur lesquelles l'artiste peut fonder son langage personnel.

Aujourd'hui, une nouvelle importance est donnée à l'étude mathématique du phénomène physique très particulier qu'est le son musical. Un des objectifs est d'en obtenir une meilleure compréhension et développer de nouvelles techniques et de nouveaux instruments, précieuses ressources du compositeur.

LE FORUM MATHÉMATIQUE DIDEROT

Le quatrième Forum Mathématique Diderot s'est tenu conjointement à Lisbonne, Paris et Vienne en décembre 1999. Le thème « Mathématique et musique » a été particulièrement fédérateur puisque plus de 1 000 personnes venues d'horizons divers y ont participé : compositeurs, instrumentistes, informaticiens, musiciens, etc. Ce fut l'occasion de dresser un bilan des relations existant entre les deux disciplines en cette fin de siècle avec en toile de fond l'interrogation persistante sur l'intérêt marqué des mathématiciens pour la musique à travers les siècles.

Pour en savoir plus

D'autres laboratoires consacrent leurs travaux de recherche au « mariage » entre science et art, en particulier entre science et musique. C'est le cas de Jean-Claude Risset, spécialiste de l'informatique musicale, et qui se distingue par sa double appartenance aux mondes de la science et des arts. Il est l'auteur de travaux sur la caractérisation et la synthèse des sons et leur perception auditive. Il a reçu la médaille d'Or du CNRS 1999 (cette médaille récompense, chaque année, une personnalité exceptionnelle de renommée internationale qui a participé activement au rayonnement de la recherche). CNRS-Info, n° 378, oct.-nov. 1999.

Contact chercheur :
Jean-Claude RISSET.
Laboratoire de mécanique
et d'acoustique,
mél : jcrisset@lma.cnrs-mrs.fr

Contact chercheur :
Laurent MAZLIAK.
Laboratoire de probabilités
et modèles aléatoires,
CNRS-Universités Paris 6 et 7,
mél : mazliak@ccr.jussieu.fr
<http://www.proba.jussieu.fr>

Contact département
des sciences physiques
et mathématiques du CNRS :
Frédérique LAUBENHEIMER,
tél. : 01 44 96 42 63
mél : frederique.laubenheimer@
cnrs-dir.fr

THÉORIE DES « PROBABILITÉS LIBRES »

Application aux permutations

La théorie des « probabilités libres » a été créée par le mathématicien Dan Voiculescu, de l'Université de Berkeley, il y a une quinzaine d'années. Elle est actuellement en plein développement. L'objet de la théorie est l'étude de certaines algèbres d'opérateurs qui proviennent de la théorie des groupes et du formalisme mathématique de la mécanique quantique, par des méthodes inspirées de la théorie des probabilités. Au début des années 1990, Voiculescu s'est aperçu que ses résultats permettaient de prévoir des propriétés remarquables des matrices de grande taille, puis R. Speicher a réussi à donner un traitement purement combinatoire de la théorie de Voiculescu. Grâce aux résultats de Speicher on peut résoudre un problème sur les permutations qui *a priori* n'a rien à voir avec le sujet initial.

Une permutation consiste à échanger des objets (ou des symboles) entre eux. Par exemple, avec les symboles ABC, on peut faire les six permutations : ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Plus généralement, avec n symboles on peut faire factorielle n permutations ($n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$). Les permutations ont de nombreuses applications aussi bien dans d'autres domaines des mathématiques qu'en informatique (dans l'analyse d'algorithmes ou le traitement de données par exemple). Bien qu'il soit facile de définir les permutations, on est loin de tout savoir à leur sujet. Un des problèmes de base est de comprendre comment les composer. Par exemple, si CBA désigne la permutation qui associe C à A, B à B et A à C, et BCA la permutation qui associe B à A, C à B et A à C, alors la composée de ces deux permutations associera A à A, C à B et B à C. Pour une permutation donnée, on peut regarder, pour chaque symbole de départ, ses images successives par la permutation. Au bout d'un certain nombre d'itérations on revient au symbole initial, et les symboles rencontrés en chemin forment l'*orbite de la lettre de départ*. On peut classer les permutations en comptant le nombre d'éléments de chaque orbite, c'est la « classe de conjugaison » de la permutation.

Une question vient alors naturellement à l'esprit : de combien de façons une permutation de classe donnée peut-elle se réaliser comme la composée de deux permutations de classes données ? Par exemple, une permutation circulaire à trois éléments BCA peut se réaliser comme le produit de deux transpositions de trois façons différentes (une transposition est une permutation qui échange deux lettres et laisse les autres inchangées). On ne connaît pas de formule explicite dans le cas général ; toutefois si les classes de conjugaisons satisfont une condition dite de « minimalité », alors il existe une formule pour calculer rapidement ce nombre (Goulden et Jackson). Cette formule a été redécouverte indépendamment par A. Nica et R. Speicher dans un contexte très différent, celui des « fonctions multiplicatives sur les partitions non-croisées » qui interviennent dans le traitement combinatoire des probabilités libres. La correspondance explicite entre les deux formules permet de simplifier les démonstrations de ces formules, d'en découvrir de nouvelles dans des situations analogues, et de mieux comprendre comment les permutations et les probabilités libres sont reliées.

Il est intéressant de constater que des liens inattendus se manifestent entre des objets mathématiques dont les définitions n'ont apparemment rien à voir. Une source importante de découvertes mathématiques se trouve dans la comparaison entre des théories mathématiques *a priori* distinctes. On retrouve très souvent des analogies ou des relations explicites, qui semblent « miraculeuses » au premier abord, et qui font progresser en même temps les deux théories, en apportant un point de vue nouveau sur les problèmes qui s'y posent.

Permutation CBA :

A	B	C
↓	↓	↓
C	B	A

Permutation BCA :

A	B	C
↓	↓	↓
B	C	A

Composée des deux permutations :

A	B	C
↓	↓	↓
A	C	B

Les permutations interviennent dans de nombreux problèmes reliés à l'informatique ou à la génétique, mais peuvent également être utilisées en littérature comme effet de style. Un exemple connu est celui du *Bourgeois gentilhomme* de Molière : «Belle marquise vos beaux yeux me font mourir d'amour», qui donne lieu à des variantes comme «Beaux vos yeux d'amour me font mourir Belle marquise».

Références :

- Biane P. Representations of symmetric groups and free probability. *Adv. Math.* 138 (1998), n° 1, pp. 126-181.
- Nica A., Speicher R. A «Fourier transform» for multiplicative functions on non-crossing partitions. *J. Algebraic Combin.* 6 (1997), n° 2, pp. 141-160.
- Biane P. Minimal factorizations of a cycle and central multiplicative functions on the infinite symmetric group. *J. Combin. Theory Ser. A* 76(1996), n° 2, pp. 197-212.
- Goulden I. P., Jackson, D. M. The combinatorial relationship between trees, cacti and certain connection coefficients for the symmetric group. *European J. Combin.* 13 (1992), n° 5, pp. 357-365.

Contact chercheur :**Philippe BIANE.****Département de mathématiques
et applications (DMA),****CNRS-ENS,****mél : Philippe.Biane@ens.fr****<http://www.dma.ens.fr/~biane>****Contact département****des sciences physiques****et mathématiques du CNRS :****Frédérique LAUBENHEIMER,****tél. : 01 44 96 42 63****mél : [frederique.laubenheimer@](mailto:frederique.laubenheimer@cnrs-dir.fr)****cnrs-dir.fr**

ACTUALITÉS DE L'INFINI

« Le zéro et l'infini »

Le XX^e siècle a vu l'apparition de merveilleuses machines qui nous permettent de mieux communiquer, de collecter plus de données, de calculer avec davantage de précision. La technologie a augmenté de plusieurs ordres de grandeur nos capacités dans tous ces domaines. Pourtant, nous ne pouvons traiter qu'une quantité *finie* d'informations, manipuler des ensembles *finis* de chiffres et écrire des suites *finies* de caractères. Comment pourrait-il en être autrement ? Quelle réflexion, d'ailleurs, pourrait-on bâtir sur cette évidence ? Les mathématiciens sont confrontés à un univers dont la complexité est potentiellement *infinie*. Ils savent donc que la « finitude » des moyens dont ils disposent n'est pas sans importance en théorie comme en pratique. Essayons de savoir pourquoi.

La découverte des irrationnels

Remontons vingt-six siècles en arrière, en Grande Grèce, parmi les Pythagoriciens. Nous savons très peu de choses sur leurs activités et leur doctrine, mais il est vraisemblable que les cas simples du « théorème de Pythagore » leur étaient connus. Quelques décades plus tard, Socrate utilise dans le dialogue du *Menon* sa célèbre maïeutique pour faire démontrer à un esclave supposé inculte le fait que le rapport de la diagonale d'un carré sur le côté a pour carré deux. Or, un raisonnement géométrique simple permet de montrer qu'aucun changement d'échelle ne permet de produire un carré dont le côté et la diagonale sont tous deux de longueur entière. Donc, le rapport diagonale/côté est un nombre *irrationnel*, c'est-à-dire que le nombre « racine de 2 » n'est pas une fraction dans notre terminologie. Les chercheurs grecs de la jeune École de Platon étaient conscients de ce phénomène. Leur problème était de trouver un discours, un *logos* pour décrire et manipuler ces nombres mystérieux. Ce défi scientifique a été relevé par leur contemporain Eudoxe de Cnide (400 environ - 347 environ avant J.-C.), à qui on attribue la théorie grecque des grandeurs. Eudoxe identifie un nombre x à l'ensemble des fractions inférieures à x , ce qui permet de fonder une étude rigoureuse des nombres réels, comme le fera Dedekind au XIX^e siècle. L'admirable théorie d'Eudoxe pose cependant un problème : pour comparer deux nombres, et pour calculer par encadrements successifs un nombre irrationnel, il faut effectuer une infinité d'opérations, ce qui est *pratiquement* impossible. L'irrationalité de la racine de 2 n'étonne aujourd'hui plus personne. Nous vivons très bien avec l'idée que nous ne connaissons jamais que des valeurs approchées de cette grandeur. Mais l'époque moderne a vécu un événement scientifique assez similaire à la découverte des irrationnels.

UN SOUVENIR DU COLLÈGE :
DANS UN TRIANGLE RECTANGLE,
LE CARRÉ DE L'HYPOTÉNUSE EST
ÉGAL À LA SOMME DES CARRÉS
DES DEUX AUTRES CÔTÉS.

La crise des fondements

En 1871, Georg Cantor, pour résoudre le problème de l'unicité du développement d'une fonction en série de Fourier, invente la *diagonalisation*, qui permet de créer un nouvel objet mathématique à partir d'une infinité d'objets déjà construits. Mais, a-t-on le droit de parler d'un tel objet, qui ne peut être construit que par un *infini actuel*, c'est-à-dire en considérant « simultanément » tous les objets précédents ? Pour répondre à cette question, Cantor pose les bases de la théorie des ensembles. Il montre d'abord que « quel que soit l'ensemble E , l'ensemble des parties de E a plus d'éléments que E » (voir encadré 1). Mais alors on ne peut pas parler de *l'ensemble de tous les ensembles* puisque l'ensemble de ses parties en serait un sous-ensemble, ce qui contredit manifestement le fait qu'il a strictement plus d'éléments ! Bien d'autres paradoxes inquiétants voient ensuite le jour (voir encadré 2).

Le vertige contemporain

Les mathématiciens du début du XX^e siècle ont donc été confrontés à la tâche d'axiomatiser l'arithmétique et la théorie des ensembles, et de montrer que les systèmes ainsi construits ne contiennent pas de contradiction. Il faudra trente ans pour que Kurt Gödel crée la surprise en montrant qu'il est impossible de démontrer, en n'employant que des procédés finis, la non-

contradiction de l'arithmétique, telle que l'ont formalisée Dedekind et Peano, et *a fortiori* de la théorie des ensembles qui contient l'arithmétique. Une conséquence importante du résultat de Gödel est la distinction subtile entre *vrai* et *démontrable* : certains énoncés de l'arithmétique sont vrais, en ce sens qu'ils sont vérifiés pour tout nombre entier, mais ils ne sont pas démontrables, en ce sens qu'aucun argument ne comportant qu'un nombre fini de signes ne peut les établir. Tarski a ensuite montré que la complexité de l'ensemble des énoncés vrais était intrinsèquement plus grande que celle des énoncés démontrables. En particulier, aucun procédé algorithmique, aucun *automate* ne peut répondre à toutes les questions arithmétiques. Ces résultats ont été précisés en 1970 par Julia Robinson et Yuri Matijasevic, qui ont montré l'existence de polynômes à plusieurs variables à coefficients entiers qui n'ont pas de racines entières, bien que cela ne puisse être établi par un programme ou par un algorithme. Intuitivement, le théorème de Robinson-Matijasevic nous dit qu'il y a des polynômes sans racines entières, pour lesquels nous ne pourrions montrer cette absence de racines qu'en essayant toutes les valeurs possibles des variables, ce qui est bien sûr impossible.

Un puits sans fond

Les polynômes de Robinson-Matijasevic sont des objets *ad hoc* dont les « vrais » arithméticiens ne sont pas tenus de se soucier, mais certains problèmes centraux de l'arithmétique, parmi lesquels une meilleure compréhension de la répartition des nombres premiers, pourraient peut-être donner lieu à des énoncés indémontrablement vrais. En effet, exprimons en termes simples ce que les travaux des logiciens nous ont appris : nous ne connaissons jamais que des approximations de la vérité arithmétique. La complexité de l'ensemble des entiers, muni de l'addition et de la multiplication, est *effectivement* infinie. Et ce dernier fait est capital. En effet, savoir coder et décoder l'information est aujourd'hui plus important que jamais, la connaissance de grands nombres premiers est devenue une donnée stratégique, et les méthodes de factorisation des secrets d'État. Il ne fait aucun doute que nous puiserons encore et encore dans ce réservoir de complexité que sont les nombres entiers. Les logiciens, loin de nous inquiéter, nous rassurent : notre provision est inépuisable.

UN THÉOREME DE CANTOR

Supposons qu'un ensemble E ait autant d'éléments que l'ensemble $P(E)$ de ses parties. Il existerait alors une fonction M qui « marierait » les éléments de E à ceux de $P(E)$ sans laisser personne célibataire. Mais, soit D la partie de E formée des éléments x tels que x n'appartienne pas à $M(x)$. Si $D = M(t)$, on déduit de la définition de D que t appartient à D si et seulement si t n'appartient pas à D , et cette contradiction montre que D n'est pas de la forme $M(t)$, ce qui termine la démonstration. Cet argument s'apparente à la diagonalisation de Cantor, et au classique paradoxe du menteur : quand je dis « je mens », dis-je ou non la vérité ? Le théorème de Gödel repose également sur un argument du type « menteur », puisque Gödel construit un énoncé G de l'arithmétique dont une interprétation est « il n'existe pas de démonstration de G ».

LES PARADOXES DE 1900

Bertrand Russell considère l'ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas l'un de leurs propres éléments. Cet ensemble est-il l'un de ses propres éléments ? D'autre part, tout ensemble non vide d'entiers positifs a un plus petit élément. Étudions alors avec Jules Richard l'ensemble R de tous les entiers qui ne peuvent pas se définir en moins de seize mots. Notons n le plus petit élément de R . L'entier n est « le plus petit entier qui ne peut pas se définir en moins de seize mots », mais nous venons de le définir en quinze mots, donc il n'est pas dans R !

Contact chercheur :
Gilles GODEFROY,
Équipe d'analyse,
CNRS-Université Paris 6,
mél : gig@ccr.jussieu.fr

Contact département
des sciences physiques
et mathématiques du CNRS :
Frédérique LAUBENHEIMER,
tél. : 01 44 96 42 63
mél : frederique.laubenheimer@cnrs-dir.fr

LE THÉORÈME DE FERMAT

« *Il n'est pas possible de décomposer un cube en somme de deux cubes, une puissance quatrième en somme de deux puissances quatrièmes et généralement aucune puissance d'exposant supérieur à 2 en deux puissances de même exposant* ». Cette courte annotation d'un mathématicien français, magistrat de son état, Pierre de Fermat, écrite en marge d'un livre de mathématiques dans la première moitié du XVII^e siècle, est devenue l'un des théorèmes les plus célèbres des mathématiques : une preuve n'en fut apportée qu'en 1995, par Andrew Wiles de l'Université de Princeton.

Pierre de Fermat (1601-1665), conseiller au parlement de Toulouse, fut l'un des mathématiciens les plus importants du XVII^e siècle ; en même temps que René Descartes, il eut l'idée de la géométrie analytique, c'est-à-dire de la transcription algébrique des problèmes de géométrie, pour étudier les tangentes à une courbe par exemple. En collaboration avec Blaise Pascal, il inventa le calcul des probabilités. Et avec Marin Mersenne ou Bernard Frenicle de Bessy, il s'intéressa aux problèmes sur les nombres entiers. À cette époque, les deux grandes branches des mathématiques théoriques étaient la géométrie et l'arithmétique, qui géraient l'une les grandeurs continues, l'autre les grandeurs discrètes. L'algèbre était connue (elle fut développée dans les pays islamiques dès la période médiévale), mais elle ne paraissait pas nécessairement bien adaptée pour traiter des problèmes sur les entiers : la solution d'une équation à coefficients entiers n'est pas nécessairement entière.

Pendant les trois siècles et demi qui séparent l'énoncé de sa preuve, le théorème de Fermat a été retranscrit, réinterprété, partiellement prouvé, en utilisant des méthodes et des langages issus de branches variées des mathématiques. À commencer par l'utilisation de simples notations algébriques, absentes de l'original. Le problème de Fermat a maintes fois été réécrit et sa forme plus connue* est : « Soit n , un entier au moins égal à trois. Il n'existe pas de nombres entiers non tous nuls (ni même d'ailleurs de rationnels) vérifiant l'équation $x^n + y^n = z^n$ ».

La démonstration de Wiles repose sur une réinterprétation géométrique (suggérée par Yves Hellegouarch dès les années 70) reliant l'équation de Fermat à celle de la courbe : $B^2 = A(A - x^n)(A + y^n)$. Chaque solution éventuelle de l'équation définit donc les coefficients d'une courbe particulière, courbe elliptique.

Au milieu des années 1980, il fut montré que si le théorème de Fermat était faux, c'est-à-dire s'il existait une courbe elliptique avec les coefficients comme ci-dessus, elle contredirait une conjecture très importante, dite de Shimura-Taniyama-Weil (STW). Cette conjecture établit une correspondance entre les courbes elliptiques et des fonctions dites « modulaires » ; ces dernières ressemblent un peu aux fonctions cosinus et sinus, en particulier elles vérifient certaines propriétés de périodicité.

C'est cette conjoncture que Wiles est parvenu à démontrer, à quelques restrictions techniques près, prouvant du même coup le théorème de Fermat.

Il est bien sûr possible que d'autres démonstrations, plus simples peut-être, du théorème de Fermat, soient trouvées dans les prochaines années. Quoi qu'il en soit, la fin de la saga Fermat n'est pas la fin de la théorie des nombres : outre les approches évoquées au cours de ce récit, et dont l'étude se poursuit activement, bien d'autres problèmes, théoriques ou plus appliqués, restent à résoudre.

Contacts chercheurs : laboratoire de mathématiques d'Orsay, département de mathématiques, CNRS-Université Paris 11,
<http://www.math.u-psud.fr>

Karim BELABAS,
mél : Karim.Belabas@math.u-psud.fr

Catherine GOLDSTEIN,
mél : Catherine.Goldstein@math.u-psud.fr

* On remarque que pour $n=2$, il y a au contraire une infinité de solutions, par exemple $5^2 = 3^2 + 4^2$ ou $13^2 = 5^2 + 12^2$, ou encore $29^2 = 19^2 + 20^2$.

LA CONJECTURE DE TANIYAMA-WEIL ENFIN DÉMONTRÉE !

Cette conjecture (nommée STW dans l'article ci-contre) dont la date de naissance et le nom sont assez flous a pour conséquence le grand théorème de Fermat d'après les travaux de Hellegouarch-Frey et Serre-Ribet. Jusqu'en 1993, on ne savait vérifier cette conjecture que dans certains cas, et encore avec grande difficulté. Wiles a réussi à la prouver dans les cas qui servaient pour démontrer le théorème de Fermat. Les travaux de Wiles ont entraîné une intense activité : cette année la conjecture complète a enfin été démontrée par Breuil, Conrad, Diamond et Taylor.

Le but était d'établir une correspondance entre des objets de nature arithmétique (courbes elliptiques) et des objets de nature analytiques (formes modulaires) en passant par la théorie de Galois (représentations galoisiennes). Les travaux antérieurs de Christophe Breuil se sont révélés essentiels car ils permettent de décrire explicitement certains objets (groupes p -divisibles) intermédiaires entre les courbes elliptiques et les représentations galoisiennes.

La conjecture de Taniyama-Weil est le point de départ du programme de Langlands (fin des années 60). L'année 1999 a vu l'accomplissement de deux autres de ses principaux objectifs : Michael Harris-Taylor** et Guy Henniart ont établi la correspondance de Langlands locale en dimension quelconque et Laurent Lafforgue a établi la correspondance de Langlands globale en dimension quelconque pour les corps de fonctions.

Contact chercheur :
Pierre COLMEZ.
Institut de mathématiques,
CNRS-Universités Paris 6 et 7,
mél : pierre.colmez@ens.fr

** Michael Harris, institut de mathématiques (CNRS-Universités Paris 6 et 7),
<http://www.math.jussieu.fr>. Christophe Breuil, Guy Henniart et Laurent Lafforgue, laboratoire de mathématiques d'Orsay (CNRS-Université Paris 11),
<http://www.math.u-psud.fr>.

FORMULES ET NOMBRES PREMIERS

Il existe des formules qui donnent tous les nombres premiers, mais...

Les nombres premiers* semblent se présenter en grand désordre 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,... Pourtant, des propriétés énoncées au XIX^e siècle montrent un comportement non « anarchique ». Le *théorème de raréfaction des nombres premiers* de Jacques Hadamard et Jean de la Vallée Poussin nous enseigne par exemple que le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n est approximativement $n/\ln n$ (où $\ln n$ désigne le logarithme népérien de n). C'est là une indication que les nombres premiers n'arrivent pas dans un chaos absolu mais au contraire, avec une certaine régularité.

* Nombres qui ne sont divisibles que par le nombre 1 et par eux-mêmes.

Les nombres premiers suivent des lois que les mathématiciens essaient d'identifier. La preuve que de telles lois existent est qu'on peut mettre les nombres premiers en formules. Bien sûr, aucune formule très simple ne convient et on montre par exemple qu'aucune fonction polynôme (voir encadré page suivante) ne donne que des nombres premiers sauf dans le cas trivial où la formule est constante. En 1947, W. Mills étonne la communauté mathématique en établissant l'existence d'une constante A qui, insérée dans une formule (voir encadré), donne un nombre premier pour tout n supérieur ou égal à 1. L'utilité de cette formule est cependant illusoire, car on ne peut calculer la constante A qu'à la condition de connaître déjà les nombres premiers. Une autre formule éclaire ce phénomène qui donne le $n^{\text{ième}}$ nombre premier pour tout n supérieur ou égal à 1 (voir encadré). La recherche de formules donnant les nombres premiers doit donc se limiter à celles qui ne font pas intervenir de constantes réelles.

Les mathématiciens Minác et Willans ont imaginé une formule plus remarquable encore dont l'explication est moins simple, mais qui, cette fois, donne tous les nombres premiers dans l'ordre et sans répétition. Cette formule ne comporte que 52 symboles ! On ignorait qu'une telle formule pouvait exister avant sa publication en 1995. Mais est-elle vraiment utile ? Non, car la mise en œuvre de telles formules se révèle très coûteuse en temps de calcul et aucun programme d'ordinateur aujourd'hui n'utilise ces formules qui, en définitive, apparaissent comme des jeux d'adresse mathématique. Le véritable problème est de définir des algorithmes de calculs (en langage mathématico-informatique) qui donneront rapidement des nombres premiers. De tels programmes sont applicables à la cryptographie par exemple.

De nombreux progrès ont été réalisés ces dernières années dans la manipulation et la connaissance des nombres premiers : les algorithmes probabilistes de test de la primalité identifient des nombres premiers de 100 000 chiffres en quelques fractions de seconde. Les algorithmes de factorisation deviennent chaque année de plus en plus puissants. Toutefois, on ne connaît encore aucune méthode permettant d'engendrer rapidement un nombre premier de longueur n . On le voit, les travaux sur les nombres premiers et leurs relations avec l'informatique sont nombreux et loin d'avoir été tous explorés. De nombreuses questions restent à résoudre. La recherche fondamentale rejoint les applications pour construire une science des réseaux informatiques et des communications de demain dont la sécurité est dès aujourd'hui intimement liée aux nombres premiers (cryptographie, codes correcteurs d'erreurs, algorithmique distribuée, etc.).

Références :

- Jean-Paul Delahaye. *Merveilleux nombres premiers. Voyage au cœur de l'arithmétique* Éditions Belin/Pour la science, Paris, 2000, (Bibliothèque scientifique) 336 p. - 155 F.
- Jean-Paul Delahaye. *Jeux mathématiques et mathématiques des jeux*. Éditions Pour la science, Paris, 1998, (Bibliothèque Pour la science) 141 p. - 95 F.

DES MILLIERS DE DOLLARS POUR DES MILLIONS DE CHIFFRES

L'Electronic Frontier Foundation (EFF, association de défense et de promotion de l'utilisation de l'Internet) a annoncé, en mars 1999, que le don d'un mécène anonyme, 50 000 \$ (environ 250 000 F) serait attribué au premier individu ou groupe qui découvrirait un nombre premier de plus d'un million de chiffres décimaux. Ce prix a été remporté quelques mois plus tard par les découvreurs de $2^{6972593} - 1$. Un autre prix, de 100 000 \$ cette fois, récompensera la découverte du premier nombre premier de plus de 10 millions de chiffres décimaux (il y a aussi 150 000 \$ pour la découverte d'un premier nombre premier de plus de 100 millions de chiffres décimaux, et 250 000 \$ pour le premier nombre premier de plus d'un milliard de chiffres décimaux).

DES FORMULES À L'INFINI...

• **Aucune fonction polynôme $f(n)$** : $f(n) = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \dots + a_1 n + a_0$, où a_i est entier et $a_p \neq 0$ ne donne que des nombres premiers pour n positif ou nul sauf dans le cas trivial où la formule est constante ($f(n) = a_0$ avec a_0 un nombre premier).

• **Formule de W. Mills** : $[A^{3^n}]$ où le crochet $[]$ désigne la fonction *partie entière* ou *arrondi à l'entier inférieur*. Cette constante – dite de Mills – a été calculée avec une bonne précision et vaut :

1,306377883863080690468614492602605712916784585156713644368053759966434...

• **Troisième formule** : $[L \times 10^{n^2}] - [L \times 10^{(n-1)^2}] - 10^{2n-1}$ donne en effet le $n^{\text{ième}}$ nombre premier pour tout $n \geq 1$: $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, p_6 = 13, p_7 = 17$, etc.

La constante L contient les nombres premiers cachés dans ses décimales, mais cette fois de manière explicite :

$L = 0,20030000500000070000000110000000001300...$ (le $n^{\text{ième}}$ nombre premier est placé en position n^2).

• **Formule de Minác et Willans** :

$$p_n = 1 + \frac{[n/(1 + \frac{[(j-1)! + 1]/j - [(j-1)!/j]}{m})]^{1/n}}{n-1}, \quad p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, \\ p_5 = 11, p_6 = 13, p_7 = 17, \text{ etc.}$$

• La recherche de formules donnant les nombres premiers doit donc se limiter aux formules ne faisant pas intervenir de constantes réelles qui permettent trop facilement de tricher. Il en existe et en voici une assez simple :

$$t(n) = 2 + n \left[\frac{1}{1 + \frac{[(n+2)/p - [(n+1)/p]]}{p=2}} \right] \quad n \geq 0.$$

Cette formule ne donne que des nombres premiers et les donne tous, mais lentement et en répétant 2 un grand nombre de fois : $t(0)=2, t(1)=3, t(2)=2, t(3)=5, t(4)=2, t(5)=7, t(6)=2, t(7)=2, t(8)=2, t(9)=11, t(10)=2, t(11)=13, t(12)=2, t(13)=2, t(14)=2$, etc.

Contact chercheur :
Jean-Paul DELAHAYE,
Laboratoire d'informatique
fondamentale de Lille (LIFL),
CNRS-Université Lille 1,
mél : delahaye@lifl.fr
<http://www.lifl.fr>

**Contact département
des sciences pour l'ingénieur
du CNRS :**
Béatrice REVOL,
tél. : 01 44 96 42 32
mél : beatrice.revol@cnrs-dir.fr

LA MATHÉMATIQUE DES INTERFACES ALÉATOIRES

La modélisation d'une interface entre deux substances est un problème classique des mathématiques appliquées à la physique, la chimie, et la biologie, etc. À titre d'exemple, prenons une réaction chimique entre deux substances : tout se passe à l'interface. Il est donc primordial de connaître la forme de l'interface pour mieux comprendre la réaction chimique. Or, cette étude est souvent trop difficile pour être résolue mathématiquement. L'étude mathématique rigoureuse de modèles simplifiés et leur simulation sur ordinateur sont une étape essentielle, parfois intuitive, dans la compréhension du comportement de modèles plus sophistiqués.

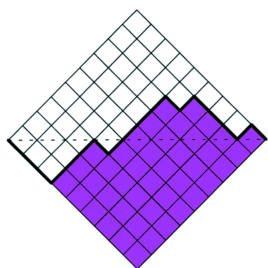


Figure 1: modèle d'interface en 2 dimensions.

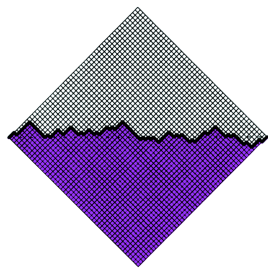


Figure 2: interface typique dans une grande boîte.

qu'il y ait des interfaces qui « aillent » très bas ou très haut, la probabilité de trouver une interface avec cette propriété est minuscule pour une grande boîte.

Ce phénomène « de la limite centrale » en probabilités peut, au premier abord, sembler contradictoire. En effet, pourquoi une interface aléatoire, qui pourrait prendre beaucoup de formes différentes, a-t-elle une forme proche de celle de la médiane ? Cela s'explique par le fait que le nombre de façons de bouger l'interface médiane (donc le nombre d'interfaces proches de celle-ci) est beaucoup plus important que pour toutes les autres formes d'interfaces, même combinées.

Considérons maintenant le problème de « l'empilement de cubes », modèle en dimension 3 (avec une interface de dimension 2). On remplit une boîte pyramidale avec des cubes en les poussant au fond de la boîte de telle manière que la surface des cubes visibles soit contiguë, comme indiquée dans la figure 3 (vue de haut). Ce modèle tridimensionnel résolu récemment présente beaucoup de similarités avec le modèle bidimensionnel. Il y a une surface médiane, et presque toutes les interfaces sont proches de cette médiane**.

Un exemple concret d'interface qu'on peut comprendre avec ce type de modèle est l'interface eau/air dans une piscine. Quand on vient de sortir de la piscine, avant que l'eau ne se calme

Commençons par un modèle bien connu en mathématique, celui de l'empilement de carrés (voir figure 1). Supposons que l'on a une boîte bidimensionnelle (un carré de taille n) dans laquelle on met des petits carrés de taille 1. On les laisse tomber au fond de la boîte de telle manière que la « surface » visible soit une ligne continue allant de gauche à droite (en gras dans la figure 1). Cette surface est comme une interface entre les carrés et l'air. Elle est comprise entre l'interface minimale (boîte) et l'interface maximale (boîte complètement remplie). Envisageons maintenant, parmi toutes les interfaces possibles, l'interface aléatoire. Quel en sera l'aspect ?

Par symétrie, le « volume » (nombre de carrés) de l'interface est égal en moyenne à la moitié du volume maximal. Ici, le volume moyen est aussi le *volume typique* en ce sens que pour une boîte suffisamment grande, plus de 99 % des interfaces ont un volume compris entre 49 % et 51 % du volume maximal. De plus, presque toutes les interfaces sont très proches de l'interface médiane (en pointillé dans la figure 1). Les points les plus hauts et plus bas sont à une distance* de l'interface médiane inférieure à 1 % de la dimension de la boîte. La figure 2 montre une interface typique. Bien

** En termes quantitatifs, pour une boîte de côté de longueur n , presque toutes les interfaces ont des fluctuations autour de la médiane de l'ordre de \sqrt{n} (racine carrée de n).*

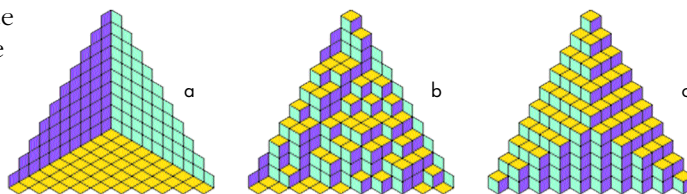
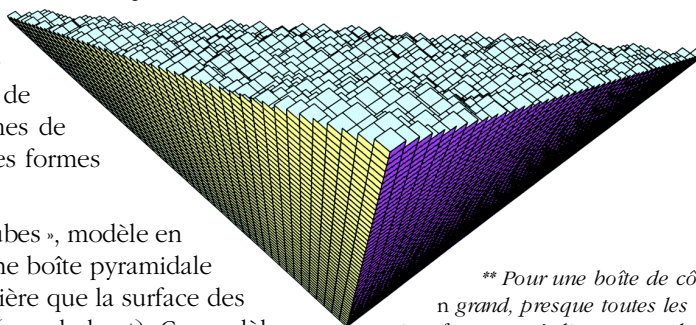


Figure 3 : modèle d'interface d'un empilement de cubes. (a) La boîte vide. (b) Exemple d'interface. (c) La boîte pleine.

Figure 4 : interface aléatoire dans une boîte de taille $n = 50$.



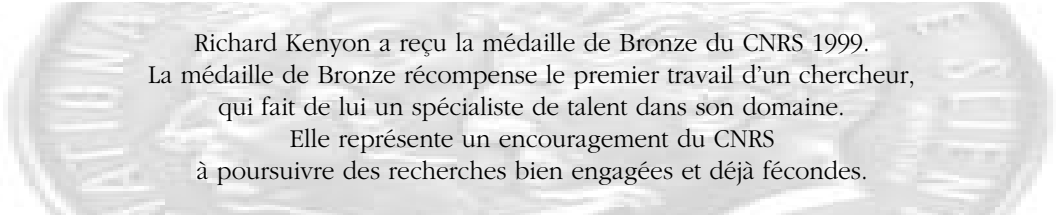
*** Pour une boîte de côté n grand, presque toutes les interfaces sont à distance au plus $\ln(n)$ (logarithme népérien de n) de l'interface médiane. Par exemple, pour une boîte de taille « un million » (10^6), l'interface typique sera, avec une grande probabilité, à distance au plus 14 de l'interface médiane.*

complètement, la surface de l'eau comporte des petites ondelettes aléatoires, mais aussi - et c'est plus difficile à voir - des vagues de toutes tailles quoique de très faible énergie. Cette interface est assez bien modélisée par l'empilement de cubes expliqué ci-dessus. Dans un sens mathématique précis, pour une très grande piscine, l'interface eau/air est très proche de l'interface de l'empilement de cubes.

Que peut-on conclure de ces résultats ? Il semble maintenant raisonnable de penser que dans un autre contexte, une interface aléatoire, qui n'est pas soumise à d'autres contraintes, prendra une forme proche de la forme qui maximise le nombre de fluctuations locales. De plus, on peut penser que les résultats quantitatifs mentionnés ci-dessus peuvent s'appliquer du moins quantitativement dans des cas plus généraux.

Références :

- R. Kenyon. Local statistics of lattice dimers. *Annales de l'Institut H.-Poincaré*, 33 (1997), pp. 591-618.
- *CNRS-Info*, n° 376, 07/99.



Richard Kenyon a reçu la médaille de Bronze du CNRS 1999.
La médaille de Bronze récompense le premier travail d'un chercheur,
qui fait de lui un spécialiste de talent dans son domaine.
Elle représente un encouragement du CNRS
à poursuivre des recherches bien engagées et déjà fécondes.

Contact chercheur :
Richard KENYON.
Laboratoire de mathématiques
d'Orsay,
CNRS-Université Paris 11,
mél : kenyon@
topo.math.u-psud.fr
<http://www.math.u-psud.fr>

Contact département
des sciences physiques
et mathématiques du CNRS :
Frédérique LAUBENHEIMER,
tél. : 01 44 96 42 63
mél : [frederique.laubenheimer@](mailto:frederique.laubenheimer@cnrs-dir.fr)
cnrs-dir.fr

DE L'INFINIMENT PETIT À L'INFINIMENT GRAND

Les limites macroscopiques : un outil mathématique au service de codes numériques plus performants

Des chercheurs du laboratoire de mathématiques pour l'industrie et la physique* construisent de nouveaux modèles mathématiques permettant de simuler numériquement les systèmes de particules complexes. Les applications développées portent entre autres sur l'interaction des gaz ou des plasmas avec les surfaces (régissant par exemple les nouveaux dispositifs de propulsion à plasma pour les satellites), ainsi que sur les dispositifs électroniques quantiques. Ces nouveaux modèles permettent de réaliser des codes de calcul rapides qui traduisent aux échelles macroscopiques la nature des interactions microscopiques des particules entre elles et avec leur environnement.

* CNRS-INSA-Universités
Toulouse 1 et 3.

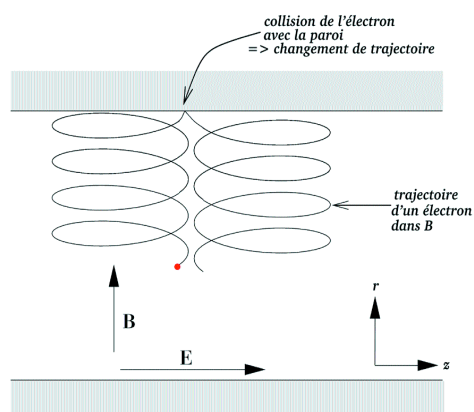


Figure 1 : dans le propulseur électrique de type SPT 100 pour les satellites, la dynamique des électrons dans les champs électrique E et magnétique B est fortement influencée par les collisions avec les parois du dispositif.

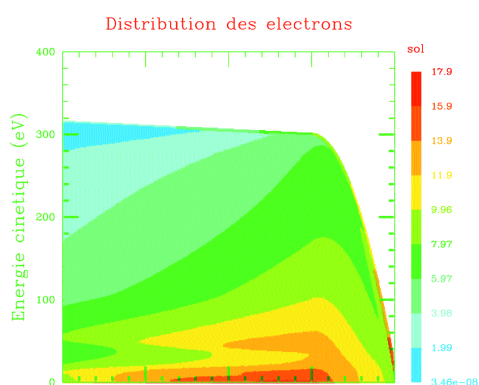


Figure 2 : le modèle SHE permet de décrire la dynamique des électrons en donnant accès au nombre d'électrons qui, dans une section {z = constante} du dispositif, ont une énergie cinétique donnée. Le même calcul par un modèle Monte-Carlo est de 100 à 1 000 fois plus coûteux en temps d'exécution (Cf. références).

La nature offre au regard une variété d'échelles considérable. Même à l'œil nu, il est facile de se rendre compte que plus de dix ordres de grandeur séparent le grain de sable de la galaxie et la connaissance précise du mouvement de chaque grain de sable est inutile pour prédire le mouvement des astres ou des planètes. Cependant, une assemblée d'un grand nombre de particules telle qu'un gaz, un tas de sable ou un composant électronique conserve dans son comportement global (aux échelles accessibles à notre regard) certains aspects de ses constituants élémentaires, bien que ces derniers soient généralement microscopiques et observables uniquement à l'aide de techniques sophistiquées. C'est ainsi qu'un tas de sable ne se comporte pas comme un gaz. C'est également pour cette raison que les composants électroniques comme les transistors et plus récemment les circuits intégrés possèdent des propriétés plus intéressantes que les lampes à vide et les ont supplantées dans nos récepteurs de radio ou de télévision.

La caractérisation des propriétés macroscopiques d'un système (e. g. la conductivité électrique ou capacité à favoriser la circulation d'un courant électrique) à partir des propriétés élémentaires de ses constituants (électrons et atomes du cristal dans des composants semi-conducteurs) a mobilisé l'énergie des scientifiques les plus prestigieux. À la fin du XIX^e siècle, Boltzmann a expliqué le caractère irréversible de l'évolution des systèmes et l'a quantifié grâce au concept d'entropie. Puis,

le mathématicien Hilbert et les physiciens Chapman et Enskog ont développé un appareil théorique (qui porte encore leur nom) permettant de traduire sur les quantités macroscopiques des systèmes les propriétés de leurs constituants élémentaires.

Ces travaux sont encore utilisés de manière systématique en modélisation numérique car ils sont indispensables pour « nourrir » les modèles des paramètres indispensables à leur validité. En effet, la prédiction numérique (par le biais du calcul informatique) de phénomènes naturels (e. g. quel temps fera-t-il demain ?) ou artificiels (le comportement de la puce à silicium d'un appareil électronique) nécessite la résolution sur l'ordinateur de systèmes d'équations complexes modélisant le comportement du système étudié. Les équations et surtout les paramètres de ces équations sont directement issus des travaux décrits plus haut.

Récemment, ce champ de recherches a suscité une forte activité au sein de la communauté de mathématiciens appliqués tant en France que dans différents pays (USA, Allemagne, Japon, etc.). La démarche de Hilbert, Chapman et Enskog et de leurs successeurs a été reprise pour obtenir les paramètres de modèles connus, mais aussi pour établir de nouveaux modèles ou de nouveaux systèmes d'équations susceptibles de mieux représenter les phénomènes physiques. Cette démarche s'est appuyée sur une meilleure connaissance des processus microscopiques comme la mise en évidence de sous-échelles, mais surtout sur la puissance de l'outil mathématique qui a permis d'étendre le domaine d'application initial de la méthode à des champs non encore couverts par celle-ci (interaction avec des surfaces par exemple). Parmi ces nouveaux modèles, on peut citer le modèle dit de « transport d'énergie » qui fournit une description précise d'un composant électronique tout en restant « abordable » en termes de temps de simulation sur ordinateur et le modèle « Spherical Harmonics Expansion » (SHE) qui a permis d'élucider certains problèmes posés par le fonctionnement d'un nouveau système de propulsion électrique pour les satellites.

L'enjeu pratique est de taille : les technologies contemporaines visent à utiliser les capacités des systèmes au plus près de leurs limites. Il en résulte que la description théorique de ces systèmes devient souvent inadaptée dans ces conditions extrêmes. Par exemple, les composants électroniques deviennent si petits que la mécanique classique cesse d'être pertinente et qu'il faut recourir à la mécanique quantique ou ondulatoire. En dépit de l'augmentation constante de la puissance de calcul des ordinateurs, il reste malheureusement impossible, dans un contexte industriel, de décrire ces systèmes avec le degré de précision souhaitable, car les modèles les plus précis sont également de loin les plus coûteux en temps de simulation numérique. La pression technologique a donc « remis à la mode » les méthodes de Hilbert, Chapman, Enskog, dans le souci d'élaborer des modèles « du juste milieu », pas trop coûteux en temps de calcul pour permettre des temps de réponse acceptables dans un contexte industriel, mais retenant les aspects essentiels des processus physiques élémentaires.

Il s'agit là d'un exemple typique où l'interaction avec l'industrie a conduit à des avancées théoriques importantes, en même temps qu'elle ouvre de nouveaux champs de collaboration particulièrement prometteurs entre scientifiques et ingénieurs.

Références :

- P. Degond, V. Latocha, L. Guarrigues and J.-P. Bœuf. Electron Transport in stationary Plasma Thrusters. *Transp. Theory and Stat. Phys.* 27 (1998), pp. 203-221.
- N. Ben Abdallah, P. Degond and S. Génieys. An energy-transport model for semiconductors derived from the Boltzmann equation. *J. Stat. Phys.* 84 (1996), pp. 205-231.
- N. Ben Abdallah and P. Degond. On a hierarchy of macroscopic models for semiconductors. *J. Math. Phys.* 37 (1996), pp. 3306-3333.

Contacts chercheurs :
laboratoire de mathématiques
pour l'industrie et la physique,
CNRS-INSA-Universités
Toulouse 1 et 3,
• Pierre DEGOND,
mél : degond@mip.ups-tlse.fr
<http://mip.ups-tlse.fr>
• Naoufel BEN ABDALLAH,
mél : naoufel@mip.ups-tlse.fr

**Contact département
des sciences physiques
et mathématiques du CNRS :**
Frédérique LAUBENHEIMER,
tél. : 01 44 96 42 63
mél : [frederique.laubenheimer@](mailto:frederique.laubenheimer@cnrs-dir.fr)
cnrs-dir.fr

MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE : UN INSÉPARABLE TANDEM

Les lois de Dame Nature traduites en langage mathématique

Très fréquemment, l'éclosion d'une intuition ou la mise en évidence d'un nouveau phénomène en physique va de pair avec la découverte du formalisme mathématique permettant de décrire et de comprendre cette intuition ou ce phénomène. La physique mathématique se situe à la jonction de ces deux courants. Elle étudie les propriétés mathématiques des théories de la physique fondamentale. De plus, elle fait apparaître et développe des structures mathématiques qui permettent de proposer des théories ou des modèles nouveaux pour la physique.

L'espace et le temps sont les « dimensions » dans lesquelles se déploient les lois de la nature (ou de l'évolution) qui encodent - sous la forme d'équations - les propriétés de symétrie observées. C'est ainsi que la mécanique, dynamique newtonienne, s'est peu à peu imposée aux XVIII^e et XIX^e siècles comme la théorie physique décrivant les trajectoires dans l'espace décrites au cours du temps par des objets physiques allant du « point matériel » à l'astre ou la planète. Au tournant du XX^e siècle, la vision de « régularité d'horloge » du système solaire décrite par la mécanique newtonienne, ainsi que de sa stabilité au cours du temps a pris un coup d'arrêt avec les travaux d'Henri Poincaré. Dans son ouvrage *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* il met en évidence l'extrême complexité des trajectoires d'un système à trois corps (Terre-Lune-Soleil). Or, la mécanique newtonienne décrit l'évolution temporelle d'un système matériel (par exemple un système à trois corps célestes qui s'attirent mutuellement par la force de gravitation); il s'agit d'une « prédiction » qui, à un ensemble de conditions initiales portant sur les positions et les vitesses à un instant de référence, fait correspondre l'état « final » (c'est-à-dire l'ensemble des positions et des vitesses à un instant ultérieur, éventuellement infini). La découverte fondamentale de Poincaré est que « de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux » et qu'ainsi, « la prédiction devient impossible et le phénomène est fortuit ».

On parle aujourd'hui de « chaos »* (ou dynamique chaotique) pour désigner cette propriété qui s'est révélée être l'apanage de la plupart des systèmes à plus de deux corps de la mécanique newtonienne. L'avènement des ordinateurs a énormément popularisé cet aspect « chaotique » de la dynamique newtonienne et des systèmes dynamiques plus généraux en produisant, par simulation numérique, des images qui matérialisent la complexité des trajectoires. Poincaré a montré que les orbites périodiques - celles qui se referment sur elles-mêmes en position et en vitesse - jouent en quelque sorte un rôle de « principe organisateur ». Elles sont comme le « squelette » de la dynamique newtonienne chaotique.

Au cours du XX^e siècle, notre compréhension de la nature a été marquée par des changements révolutionnaires qui ont conduit à trois déformations fondamentales de la structure mathématique sous-tendant les lois de la physique : il s'agit des découvertes de la *mécanique quantique*, de la *relativité restreinte* et de la *relativité générale*. La déformation de la structure mathématique conduisant à la mécanique quantique peut se comprendre comme le passage d'une géométrie habituelle où se déploie la mécanique newtonienne et où les transformations commutent** entre elles, à une géométrie « non-commutative ». Le paramètre de déformation est la « constante de Planck », h , découverte en 1900 avec la loi du rayonnement du corps noir. La nouvelle structure mathématique qui sous-tend la physique dite « quantique » est celle d'un espace de fonctions de trois variables (coordonnées de la position) dans lequel vivent les états quantiques d'une particule. S'il y a n particules, comme par exemple dans un atome, alors ce sont des fonctions de $3n$ coordonnées. L'équivalent de l'Hamiltonien de la mécanique newtonienne - qui, par définition, résume toutes les formes d'énergie cinétique ou potentielle présentes dans le système - est alors un Hamiltonien quantique *opérateur* dans cet espace de fonctions. Cet opérateur possède toutes sortes de belles propriétés mathématiques et l'on sait

* Le terme de « chaos » qui s'est imposé dans la terminologie scientifique est plus évocateur que précis ; il désigne le complémentaire dans l'ensemble des dynamiques newtoniennes des dynamiques « intégrables » (celles qui possèdent autant de lois de conservation que de degrés de liberté), le prototype étant bien évidemment le système de Kepler qui est à un degré de liberté et possède l'énergie comme quantité conservée.

** La notion mathématique de « commutation » signifie que des opérations successives peuvent se faire indifféremment dans n'importe quel ordre.

depuis près de trois quarts de siècle que l'analyse de ces propriétés permet d'obtenir les «niveaux d'énergie atomiques» *quantifiés* c'est-à-dire indexés par un nombre entier et dépendant de la constante de Planck.

Dans les années 1970-1975, Gutzwiller, ainsi que Balian et Bloch ont proposé une «formule de trace» qui établit heuristiquement un lien entre les niveaux d'énergie quantiques lorsque h tend vers 0*** et les caractéristiques du système newtonien correspondant, notamment les *orbites périodiques* qui, comme Poincaré l'avait montré, constituent le squelette autour duquel s'organise la dynamique chaotique. Une démonstration rigoureuse de ces «formules de trace» a été obtenue en étudiant sous quelles hypothèses, les plus générales possibles, le résultat pouvait être rendu, dans le cadre mathématique de l'analyse fonctionnelle qui est celui qui permet de comprendre la mécanique quantique comme une déformation de la mécanique newtonienne.

Ce programme de recherche se poursuit actuellement de façon à mettre en évidence, mathématiquement, la manière dont les orbites périodiques classiques d'un électron confiné dans un champ électromagnétique se manifestent dans la réponse magnétique d'un gaz d'électrons quantiques.

Référence :

- M. Combesure, J. Ralston and D. Robert. A proof of the Gutzwiller semiclassical trace formula using coherent states decomposition. *Commun. Math. Phys.* 202, (1999), pp. 463-480.

*** h est une constante de la physique. En divisant h par une quantité caractéristique du système ayant la même dimension, on obtient une constante sans dimension, petite, que l'on peut faire varier au voisinage de zéro (en variant les paramètres du système).

Contact chercheur :
Monique COMBESURE.
Laboratoire de physique
théorique,
CNRS-Université Paris 11,
mél : monique.combesure@
th.u-psud.fr

Contact département
des sciences physiques
et mathématiques du CNRS :
Frédérique LAUBENHEIMER,
tél. : 01 44 96 42 63
mél : frederique.laubenheimer@
cnrs-dir.fr

« TOURBILLONNEZ, TURBULENCES ! »

Vers une solution du problème de la turbulence

La turbulence intervient dans les situations les plus diverses : mouvements de l'atmosphère, prévisions météorologiques, formation des galaxies dans l'Univers primitif, évacuation de la chaleur produite par les réactions nucléaires à l'intérieur du Soleil, écoulements autour des automobiles et des avions, circulation sanguine etc. Il s'agit d'un sujet très fondamental, intéressant à la fois les mathématiciens, les physiciens et les astronomes, avec de nombreuses ramifications pratiques en météorologie, ingénierie, médecine et même en finance: les techniques d'analyse et les modèles utilisés pour étudier les tourbillons dans une soufflerie servent parfois pour les fluctuations des marchés boursiers.

Léonard de Vinci fut le premier à utiliser le mot *turbulence* (ou *turbolenza*) pour décrire les mouvements complexes de l'eau ou de l'air. En examinant les sillages turbulents derrière des obstacles placés dans un écoulement, il découvrit trois étapes clés : la turbulence est engendrée près de l'obstacle; ensuite, on observe des tourbillons qui subsistent assez longtemps; enfin, la turbulence disparaît loin de l'obstacle. Ce n'est qu'au début du XIX^e siècle que Claude Navier put écrire les équations de base décrivant l'évolution de la vitesse du fluide turbulent avec le temps. Les équations précédemment écrites par Leonhard Euler pour un fluide idéal devaient être complétées par un terme de diffusion prenant en compte la viscosité du fluide.

Quelques décennies plus tard, Adhemar de Saint-Venant remarqua qu'un écoulement turbulent, par exemple dans un canal de grande largeur, possède une viscosité « effective » beaucoup plus élevée que celle d'un fluide laminaire comme on en trouve dans un capillaire. Le transport turbulent de quantité de mouvement, de chaleur et de polluants, peut être de 3 à 15 ordres de grandeur plus efficace que ce que prédit la théorie cinétique de Maxwell pour le transport laminaire. Ainsi, sans la turbulence, la pollution urbaine persisterait pendant des millénaires, la chaleur produite par les réactions nucléaires dans les étoiles ne pourrait pas s'en échapper sur une échelle de temps acceptable et les phénomènes météorologiques deviendraient prévisibles à très long terme.

La modélisation du transport turbulent a été vite perçue comme un défi important à relever, et l'est encore à ce jour. Joseph Boussinesq, élève de Saint-Venant, introduisit le concept de « longueur de mélange ». Il supposa que le transport d'éléments fluides résulte d'une promenade aléatoire dans laquelle chaque pas est comparable en longueur à la taille des tourbillons. Depuis, d'autres modèles bien plus perfectionnés, adaptés aux écoulements complexes (par exemple en aéronautique), ont été développés par Ludwig Prandtl, Andreï Kolmogorov, Brian Spalding (grâce à de substantiels progrès théoriques et expérimentaux en turbulence¹).

Un des défis majeurs actuels est la *turbulence développée*, associée aux grands nombres de Reynolds, un paramètre sans dimension qui caractérise le rapport des forces d'inertie et des forces visqueuses. La viscosité moléculaire n'intervient alors qu'à des échelles bien plus petites que celle des instabilités qui causent la turbulence. Une vision cohérente de la turbulence développée commence à émerger vers le milieu du XX^e siècle (travaux de Lewis Fry Richardson, Andreï Kolmogorov, Lars Onsager, etc.). Il est postulé que les solutions des équations de Navier-

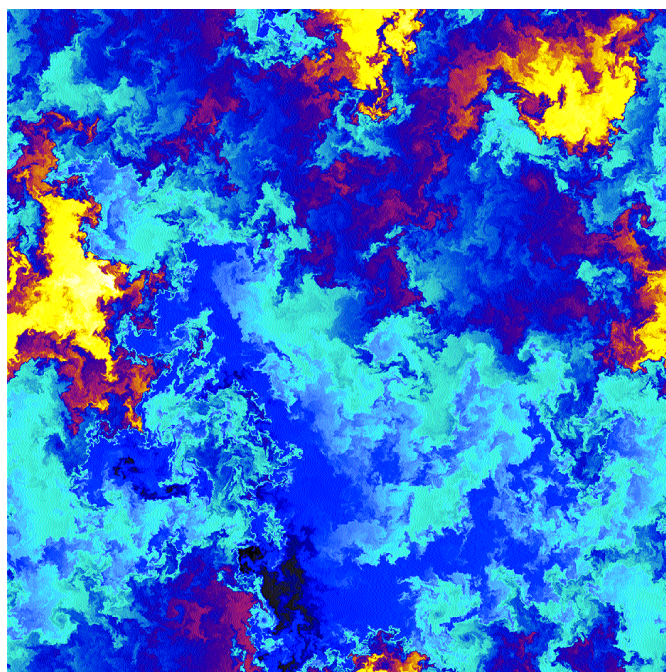


Figure : concentration d'un scalaire passif transporté par un écoulement turbulent bi-dimensionnel du type que l'on trouve dans l'atmosphère et l'océan, simulé numériquement sur une grille 2048 x 2048. Le scalaire est fortement intermittent et possède des propriétés d'échelle « anormales » qui ne peuvent être prédites par l'analyse dimensionnelle. Concentrations les plus faibles en bleu et les plus fortes en jaune.
© A. Celani, A. Noullez et M. Vergassola, observatoire de la Côte d'Azur, laboratoire G.D. Cassini, UMR 6529 ; simulations à l'IDRIS, CNRS.

¹ Contributions de Lord Kelvin, Osborne Reynolds, Geoffrey Ingram Taylor, Jean Leray, Theodor von Kármán, etc.

Stokes (voir également texte « Simulation numérique de la turbulence »), qui décrivent les propriétés hydrodynamiques du fluide, ont dans un sens probabiliste la même invariance d'échelle que les équations elles-mêmes. Par exemple, la moyenne de la différence de vitesse sur une certaine distance, élevée à la puissance p , devrait varier comme cette distance élevée à une puissance dont l'exposant est proportionnel à p . Dans cette vision « autosimilaire » de la turbulence, les divers exposants sont déterminés par une simple analyse dimensionnelle sans qu'il soit nécessaire de résoudre les équations de Navier-Stokes. Des expériences et des simulations numériques ont montré que l'invariance d'échelle supposée est en fait brisée et que la turbulence développée est « intermittente » : l'activité turbulente est de plus en plus localisée quand on observe des échelles de plus en plus petites et se comporte comme les ramifications fractales d'un brocoli. Les exposants précités ont des valeurs « anormales » non prévues par l'analyse dimensionnelle ; en revanche, ils sont universels, indépendants de la façon dont la turbulence est produite².

Pendant des années, cette intermittence n'a été décrite qu'à travers des modèles phénoménologiques ayant peu de contact avec les équations de la mécanique des fluides. Les premiers modèles ont été développés vers 1960 par l'école de Kolmogorov. Le concept moderne de « multifractale », introduit par Giorgio Parisi et l'auteur dans les années 1980, permet de décrire l'intermittence à défaut de l'expliquer. En 1994, Robert Kraichnan prédit que l'intermittence et les lois d'échelle anormales sont présentes dans un problème, régi par une dynamique linéaire, le problème du « scalaire passif ». Un exemple type est un polluant transporté par un écoulement turbulent « synthétique » dont le champ de vitesse est choisi délibérément invariant d'échelle et donc dépourvu lui-même d'intermittence. Le champ transporté devient néanmoins très fortement intermittent comme le révèlent, par exemple, des simulations numériques (voir la figure page précédente).

Cette prédiction a été, depuis peu, confirmée et, pour la première fois, on dispose d'une véritable théorie de l'intermittence capable de prévoir les valeurs anormales des exposants. La théorie utilise des outils mathématiques empruntés à la théorie quantique des champs. Les exposants anormaux ont pu être calculés par des théories perturbatives dans lesquelles le petit paramètre est lié, soit au degré d'irrégularité du champ des vitesses³, soit à la dimension de l'espace⁴. Quant au régime non perturbatif, il a pu être analysé par une méthode de Monte Carlo Lagrangienne⁵.

L'extension de telles idées au problème complet et non linéaire de la turbulence fait l'objet de recherches très actives. Les optimistes espèrent une solution pour bientôt. Mais de nombreuses années peuvent encore être nécessaires pour comprendre toute la complexité de la turbulence, question qui défie les physiciens, les mathématiciens et les ingénieurs depuis au moins un demi-millénaire.

Ce texte est une adaptation autorisée de : Uriel Frisch. Turbulence nears a final answer. *Physics World*. Vol. 12, décembre 1999, « Millenium » issue, p. 53.

² Travaux de Roberto Benzi, Benoît Mandelbrot, Steven Orszag, Patrick Tabeling, etc.

Travaux de :

³ Krzysztof Gawedzki et Antti Kupiainen ; Boris Shraiman et Eric Siggia.

⁴ Mikhail Chertkov, Gregory Falkovich, Vladimir Lebedev et Igor Kolokolov.

⁵ Andrea Mazzino, Massimo Vergassola et l'auteur.

Contact chercheur :
Uriel FRISCH.
Laboratoire Giovanni-
Domenico-Cassini,
CNRS-Observatoire
de la Côte d'Azur,
mél : uriel@obs-nice.fr
[http ://www.obs-nice.fr/cassini/](http://www.obs-nice.fr/cassini/EQUIPE1/equipe1_p1.html)
[EQUIPE1/equipe1_p1.html](http://www.obs-nice.fr/cassini/EQUIPE1/equipe1_p1.html)

Contact département
des sciences de l'Univers
du CNRS/INSU :
Philippe CHAUVIN,
tél. : 01 44 96 43 36
mél : chauvin@mesioh.obspm.fr

SIMULATION NUMÉRIQUE DE LA TURBULENCE

Le développement de la vitesse de calcul et de la capacité mémoire des ordinateurs permet de faire des calculs de plus en plus représentatifs de situations physiques. Au cours des dix dernières années, l'évolution des super-ordinateurs du centre de calcul du CNRS, l'IDRIS*, a permis de multiplier la capacité mémoire et la vitesse de calcul par 100, si l'on compare le CRAY 2 (1991) au NEC SX5 (2000), en passant par le CRAY C90 (1994) et le FUJITSU VPP300 (1997). La simulation numérique de phénomènes physiques (tels que l'écoulement turbulent, cf. encadré) est devenue indispensable, aussi bien dans de nombreux laboratoires pour aider au développement de nouveaux modèles, que dans de nombreux secteurs industriels où elle facilite les études et la conception de nouveaux produits, en particulier dans des contextes où la réalisation de maquettes est impossible ou de coût prohibitif.

* Institut pour le développement et les ressources en informatique scientifique (IDRIS), CNRS.

Les écoulements de fluides incompressibles sont gouvernés par les équations de Navier-Stokes. Ces équations, qui expriment des lois physiques de conservation, se déduisent des lois newtoniennes du mouvement. Elles relient la vitesse et la pression en chaque point de l'écoulement. Quatre fonctions inconnues doivent être déterminées : les *trois composantes du vecteur vitesse* et la *pression*. Les équations de Navier-Stokes sont des équations non linéaires, pour lesquelles une solution analytique n'est pas connue. De plus, la théorie mathématique de ces équations est encore incomplète : si en deux dimensions d'espace (écoulement *plan*) des résultats d'existence, d'unicité et de régularité de solution sont connus, il n'en n'est pas de même pour trois dimensions d'espace (écoulement *tridimensionnel*), qui se rapproche le plus de la réalité physique.

Deux termes interviennent dans les équations de Navier-Stokes. Le terme de *diffusion*, qui est linéaire, traduit l'effet physique de la *viscosité* du fluide sur l'écoulement et a pour effet de contrôler tout développement d'instabilité. Son rôle est d'autant plus important que la viscosité est plus grande. Le deuxième terme, appelé terme *inertiel*, est non linéaire et à l'origine des interactions qui peuvent générer des phénomènes à des échelles spatiales très différentes. Plus la vitesse de l'écoulement est grande, plus l'influence du terme inertiel dans les équations de Navier-Stokes est forte. Le comportement d'un écoulement dépend donc du rapport vitesse/viscosité. Un nombre adimensionnel**, le *nombre de Reynolds*, permet de mesurer ce rapport. Si le nombre de Reynolds est petit, l'écoulement est *régulier* ou *laminaire*. S'il est grand – c'est-à-dire supérieur à une certaine valeur, appelée *Reynolds critique* – l'écoulement est *turbulent*. Les écoulements turbulents sont les plus nombreux, aussi bien dans l'atmosphère qu'à la surface de la terre. Dans la nature, les nombres de Reynolds couramment rencontrés sont de l'ordre de plusieurs milliards. L'étude du passage d'un écoulement laminaire à un écoulement turbulent, lorsque le nombre de Reynolds augmente, a pu être faite dans certains cas en se basant sur la théorie des systèmes dynamiques (bifurcations).

** C'est-à-dire sans dimension (rapport de deux grandeurs de même dimension : par exemple, deux longueurs, deux vitesses, etc.).

Dans la simulation numérique d'un écoulement fluide on résout, au moyen d'un ordinateur, les équations de Navier-Stokes préalablement discrétisées avec un schéma numérique. Cela consiste à calculer, en chaque point de l'espace de calcul (c'est à dire du maillage de l'espace) et pour certaines valeurs du temps, la vitesse et la pression du fluide. On définit donc un «pas» d'espace qui représente la taille des mailles du maillage, et un «pas» de temps qui représente l'intervalle de temps entre deux instants de calcul de la solution. La difficulté de la simulation est liée à la physique du problème traité, c'est-à-dire à la turbulence. L'écoulement étant irrégulier en temps et en espace (turbulence forte), cela nécessite des pas d'espace et de temps très petits. À la contrainte sur le pas de temps, liée à la physique du problème, s'ajoute une autre contrainte liée au schéma numérique retenu pour discrétiser les équations de Navier-Stokes : c'est la contrainte de stabilité numérique de type CFL (Courant-Friedrichs-Levy). Le but de cette contrainte est d'éviter l'amplification des erreurs introduites dans le calcul au cours du temps.

Le calcul précis de toutes les échelles d'un écoulement turbulent sur de longs intervalles de temps entraîne des contraintes très fortes, le temps calcul et la mémoire nécessaires étant alors

très grands. On parle de *simulation numérique directe* (DNS) de la turbulence. De telles simulations nécessitent l'utilisation de schémas très précis (méthodes spectrales, schémas compacts) souvent peu adaptés aux écoulements dans des géométries complexes, de type écoulements industriels.

Toutes ces contraintes font que la simulation numérique directe d'écoulements reste limitée à des écoulements en géométries simples (écoulement périodique pour la turbulence homogène, écoulement dans un canal pour le développement de couches limites), et à des nombres de Reynolds faibles (quelques milliers) comparés aux nombres de Reynolds couramment rencontrés dans les écoulements industriels ou dans l'atmosphère. La complexité et les limites actuelles de la simulation numérique directe de la turbulence, même sur les ordinateurs les plus puissants, soulèvent le problème de la modélisation de la turbulence. Le but de la modélisation est de lever les contraintes sur le maillage, le pas de temps et la précision des schémas, de façon à pouvoir réduire la mémoire et le temps calcul nécessaires, et ainsi aborder des écoulements plus complexes que ceux traités par la DNS.

TURBULENCE

Un écoulement turbulent est caractérisé par :

- son *irrégularité à la fois en temps et en espace* : la simulation est, de ce fait, très délicate. Il est très sensible aux perturbations, même faibles, celles-ci ayant tendance à s'amplifier du fait de la faible viscosité. D'où la difficulté d'une prédiction détaillée (dans les prévisions météorologiques à moyen et long terme, les instabilités peuvent provenir des perturbations dues aux erreurs sur les mesures). L'analyse de tels écoulements se fait de manière statistique (calcul de quantités moyennes);
- la *présence de structures de tailles très différentes qui interagissent entre elles* : plus le nombre de Reynolds est grand, plus la différence de taille entre les plus grandes et les plus petites structures présentes dans l'écoulement est grande;
- son *caractère dissipatif* : la présence de nombreuses échelles, qui interagissent entre elles, augmente le taux de dissipation d'énergie;
- son *caractère diffusif* : la turbulence augmente le taux de mélange et de diffusion d'espèces chimiques et de la température.

On distingue deux types de turbulence : la *turbulence faible* et la *turbulence forte*. Cette distinction est fondée sur le nombre de degrés de liberté de l'écoulement, considéré comme un système dynamique. Le nombre de degrés de liberté d'un système traduit la complexité que peut prendre l'évolution d'un tel système : plus ce nombre est grand, plus l'évolution sera complexe.

- La turbulence *faible* correspond à un écoulement ayant un faible nombre de degrés de liberté, mais dont l'évolution est chaotique en temps. Ainsi, l'écoulement sera régulier en espace, mais irrégulier en temps. Le développement d'un régime temporel chaotique a pu être analysé dans certains cas (flux de Couette, convection de Rayleigh-Bénard, modèle de Lorenz). L'écoulement d'abord *stationnaire*, devient *périodique*, *bipériodique*, puis de régime de plus en plus complexe;
- La turbulence *forte* correspond à des systèmes à très grand nombre de degrés de liberté. Cela se traduit par la présence d'un très grand nombre d'échelles de tailles différentes. On est en présence d'écoulements chaotiques en temps et en espace. Ce type d'écoulement chaotique est difficile à analyser et à simuler.

Le concept mathématique d'*attracteur étrange* pour caractériser le comportement pour les grands temps de tels systèmes, correspondant à un état d'équilibre statistique, a permis de retrouver des résultats de la physique. Ainsi, l'estimation de la dimension de l'attracteur est en accord avec l'estimation du nombre de degrés de liberté d'un écoulement turbulent tridimensionnel (théorie de Kolmogorov).

MODÉLISATION DE LA TURBULENCE

Plusieurs types de modèles de turbulence existent :

- les modèles *statistiques* cherchent à déterminer un écoulement moyen, au sens de la moyenne statistique. On introduit alors une viscosité turbulente, dont le but est de modéliser l'action des fluctuations sur l'écoulement moyen. Ils sont très utilisés pour les problèmes industriels, dans des codes de simulation d'écoulements fluides en géométries complexes utilisant les éléments finis ou les volumes finis comme schéma de discrétisation des équations. Ils donnent de bons résultats loin des parois. Près des parois ils sont couplés avec des modèles de lois de parois;
- les modèles *sous-mailles* ou *Large Eddy Simulation* (LES) calculent le comportement des grandes échelles, en modélisant l'action des petites échelles. En effet, les grandes échelles d'un écoulement sont celles qui contrôlent, par exemple, les transferts de chaleur, et qui contiennent l'énergie cinétique. La modélisation se fait en modélisant l'action dissipative des petites échelles sur les grandes échelles, au moyen d'une viscosité tourbillonnaire (modèle de type Smagorinsky). Des modèles plus précis, les modèles dynamiques, ont permis d'obtenir une meilleure estimation des constantes intervenant dans la modélisation de type Smagorinsky;
- les schémas *multi-niveaux*, ou méthode *Dynamic Multilevel method* (DML) proposent une modélisation des petites échelles non fondée sur une modélisation de type Smagorinsky. Les premiers schémas multi-niveaux proposaient une simplification du calcul des petites échelles, tout en permettant une bonne estimation du comportement des grandes échelles. Ce type de modélisation numérique a permis d'accélérer le calcul de simulations directes. Mais, en vu d'une modélisation de type LES, il a fallu mieux retranscrire le caractère dissipatif des petites échelles lorsque la résolution était insuffisante. Cela a été réalisé, dans un premier temps, en modifiant les phases des petites échelles obtenues avec le calcul simplifié. Dans un deuxième temps, l'estimation des petites échelles a été obtenue en imposant une décroissance correcte de l'énergie cinétique contenue dans les échelles en fonction de leur taille (selon un spectre d'énergie de type Kolmogorov), afin de bien retranscrire l'action des petites échelles, qui sont modélisées, sur les grandes échelles qui sont calculées.

Les modèles LES restent pour l'instant limités à des problèmes plus simples que ceux traités avec les modèles statistiques, mais les progrès grâce aux ordinateurs et aux nouveaux modèles laissent prévoir de grands développements dans ce secteur pour les prochaines années.

Références :

- F. Bouchon. *Modèles sous-mailles et schémas multi-niveaux. Application à la simulation des grandes échelles d'écoulements turbulents*. Thèse université Clermont-Ferrand 2, 1999.
- T. Dubois, F. Jauberteau, R. Temam. *Dynamic multilevel methods and the numerical simulation of turbulence*. Cambridge University Press, 1999.
- J. Piquet. *Turbulent Flows (Models and Physics)* Springer-Verlag, 1999.
- C. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows*. John Wiley & sons, 1988.
- H. Tennekes, J. L. Lumley. *A first course in turbulence*. MIT Press, Cambridge, Mass, 1972.

Contacts chercheurs :
François BOUCHON,
Thierry DUBOIS.

Laboratoire de mathématiques
appliquées,
CNRS-Université
Clermont-Ferrand 2,
mél : bouchon@
ucfma.univ-bpclermont.fr
mél : thdubois@
ucfma.univ-bpclermont.fr
http://www.lma.
univ-bpclermont.fr

François JAUBERTEAU.
Laboratoire de mathématiques,
CNRS-Université de Nantes,
mél : jauber@math.univ-nantes.fr
http://www.math.sciences.
univ-nantes.fr

Roger TEMAM.
Laboratoire de mathématiques
d'Orsay,
CNRS-Université Paris 11,
mél : roger.temam@
math.u-psud.fr
http://www.math.u-psud.fr

Contact département
des sciences physiques
et mathématiques du CNRS :
Frédérique LAUBENHEIMER,
tél. : 01 44 96 42 63
mél : frederique.laubenheimer@
cnrs-dir.fr

LES MYSTÈRES DE LA VOÛTE CÉLESTE

Cosmologie et mathématiques

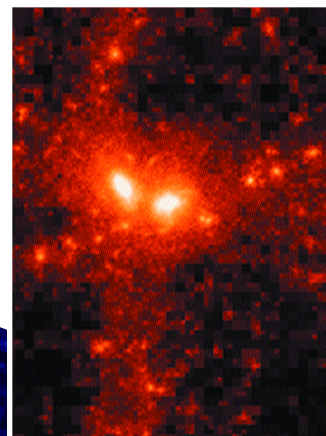
La cosmologie s'est donnée pour objectif ambitieux d'expliquer l'origine, l'évolution, et la structure de notre Univers. Pour y parvenir, les recherches modernes progressent conjointement suivant les axes habituels de la démarche scientifique, c'est-à-dire une base théorique et la mise au point et l'utilisation de moyens instrumentaux et observationnels qui fournissent une connaissance « objective » de notre Univers qu'il s'agit d'interpréter.

Les travaux de recherche de l'équipe « Cosmologie, gravitation et structures cosmiques » du département d'astrophysique extragalactique et de cosmologie sont de nature essentiellement théorique. Ils consistent principalement à mieux appliquer à l'Univers les lois connues de la physique ainsi que leurs extensions théoriques originales dans des domaines d'énergie non encore totalement vérifiées expérimentalement. Il s'agit d'élaborer des modèles physiques des systèmes cosmologiques, comme l'Univers dans son ensemble et ses constituants, dont l'origine, la formation et l'évolution dépendent de la dynamique globale de l'Univers (premiers objets cosmiques, galaxies, amas de galaxies, etc.).

Cinq grandes problématiques sont posées en cosmologie :

- élaborer un modèle physique de l'Univers dans ses époques les plus reculées, et cohérent avec notre compréhension de la structure fine de la matière (*i.e.* avec la physique des très hautes énergies) ;
- déterminer l'origine des fluctuations de densités primordiales de matière et suivre les photons (voire les gravitons) issues de ces fluctuations qui ont parcouru tout l'Univers observable en interagissant éventuellement avec les différentes structures cosmiques ;
- expliquer la formation des premiers objets cosmiques et des galaxies en détaillant les nombreuses propriétés structurelles de ces objets ;
- déterminer et interpréter les valeurs des différents paramètres cosmologiques de l'Univers et caractériser la nature des différentes composantes de la matière noire ;
- dresser une cartographie de la distribution de matière de l'Univers aujourd'hui et le plus reculé dans le passé.

Les mathématiques jouent un rôle déterminant avec par exemple, les simulations numériques de la formation des grandes structures de l'Univers : développements analytiques en amont et en aval des calculs numériques, méthodes algorithmiques et utilisation intensive de gros moyens informatiques, traitement statistique comparatif de l'information disponible sur la distribution de matière dans l'Univers observable et dans l'Univers simulé. Le cosmologiste fait d'abord des approximations physiques préliminaires pour modéliser mathématiquement le système étudié. Il énonce une description abstraite du système en termes de concepts ou de grandeurs caractéristiques (position, vitesse, énergie, etc.) et de lois physiques reliant ces quantités entre elles. La résolution analytique des équations établies n'est qu'exceptionnellement réalisable. C'est pourquoi il est nécessaire de dégager des méthodes numériques de détermination des solutions approchées dont on calculera au mieux l'écart avec les solutions exactes et enfin de concevoir une algorithmique optimale de résolution numérique adaptée aux ordinateurs actuels. Les résultats issus de véritables expériences de cosmologie numérique sont ensuite



© Jean-Michel Alimi (CNRS/UMR 8631, observatoire de Paris-Meudon).

Évolution de la structuration tri-dimensionnelle d'un univers avec constante cosmologique. Une tranche d'univers bi-dimensionnelle de $64 h^{-1}$ Mpc de côté, projetée sur le ciel est représentée. L'apparition de grands vides, de filaments, d'amas... en bon accord avec notre univers observable est le résultat de la dynamique auto-gravitante non-collisionnelle de la matière noire qui seule est représentée sur ces figures. Simulation numérique réalisée par Jean-Michel Alimi (CNRS, UMR 8631, observatoire de Paris-Meudon) sur les moyens informatiques de l'IDRIS et de l'observatoire de Paris-Meudon.

analysés en termes statistiques.

L'origine de la transition entre une distribution de matière homogène (grandes échelles dans l'Univers primordial) et une distribution de matière très inhomogène liée aux galaxies (petites échelles dans notre Univers local) est le résultat de la croissance de faibles fluctuations de densité de matière primordiale. Tant que l'on néglige les processus dissipatifs (*i.e.* emprunt d'énergie au milieu extérieur), dominant uniquement dans les zones les plus denses, comme les cœurs de galaxies ou les cœurs d'amas de galaxies, l'évolution du champ de matière primordiale, résulte de l'attraction gravitationnelle des particules de matière tout au long de l'histoire de l'Univers. Dès que la distribution de matière devient fortement inhomogène et non-linéaire (fort contraste de densité inévitable avec l'apparition de structures dans l'Univers), on ne dispose plus de solutions analytiques. Le recours aux simulations numériques est alors indispensable.

De plus, la physique de l'Univers très primordial ne fournit qu'une description statistique de la distribution de matière initiale à la formation des grandes structures. Les simulations numériques permettent également de comparer plusieurs réalisations statistiques d'un même processus aléatoire à l'origine des structures dans l'Univers. Et la confrontation aux observations, afin de valider un modèle théorique, se fait alors essentiellement sur des quantités moyennes. De nombreuses méthodes d'analyses statistiques utilisées pour étudier la distribution observationnelle de la matière dans l'Univers ont été développées et utilisées par les cosmologistes. Ces méthodes variées concernent les analyses en corrélations, les analyses multi-fractales, l'analyse en ondelettes...

Le calcul de l'évolution de la structuration de notre Univers dominé par l'énergie du vide, comme semblent le penser aujourd'hui les cosmologistes, conduit à la distribution de matière représentée par ailleurs (voir clichés).

Contact chercheur :
Jean-Michel ALIMÉ.
Département d'astrophysique
extragalactique
et de cosmologie (DAEC),
CNRS-Observatoire de Paris-
Meudon,
mél : Jean-Michel.Alimi@obspm.fr
<http://www.daec.obspm.fr>

Contact département
des sciences de l'Univers
du CNRS/INSU :
Philippe CHAUVIN,
tél. : 01 44 96 43 36
mél : chauvin@mesio.b.obspm.fr

MATHÉMATIQUES ET BIOLOGIE SONT-ELLES EN HARMONIE ?

La place grandissante des mathématiques en biologie

Alors que les mathématiques ont de tout temps imprégné les sciences de la matière et les sciences de l'Univers, les sciences de la vie leur sont longtemps restées imperméables. Aujourd'hui, il n'est pas un domaine des Sciences de la vie (génétique, génétique moléculaire, génétique des populations, biologie moléculaire, écosystèmes, physiologie, systématique, neurosciences, etc.) qui ne fasse appel aux mathématiques et qui ne soit devenu tributaire des mathématiques pour son propre développement. Que s'est-il donc passé ?

Il faut d'abord analyser les causes de l'ancienne antinomie biologie/mathématiques. Cette opposition est si forte que la légendaire dichotomie entre « sciences dures (ou exactes) » et « sciences molles » s'est longtemps superposée à la participation des mathématiques aux disciplines concernées.

Au premier abord, la biologie dérange notre esprit cartésien. *Rien de biologique n'est complètement descriptible en termes mathématiques* : le naturaliste reconnaît un animal ou une plante sur la base de son expérience. *Rien n'est totalement prévisible* et l'expérimentateur le sait bien*. *Rien n'est totalement reproductible* : ce qui s'est produit à l'instant t ne se produira pas nécessairement à l'instant $t+1$. *Rien n'est constant* : le temps fait évoluer l'objet vivant dans sa forme et dans ses fonctions, de manière irréversible. L'identité totale de deux objets biologiques n'existe pas, ni à l'intérieur d'une même espèce, ni même à l'intérieur d'un couple de jumeaux. Deux obstacles majeurs freinent l'« intrusion » des mathématiques dans la biologie : la diversité du vivant et sa complexité. Les biologistes ont longtemps lutté contre la diversité soit en l'ignorant, soit en la contournant par une démarche intellectuelle fondée sur l'apprentissage et l'expérience individuelle. À cet égard, l'acuité de l'œil de l'entomologiste ou du botaniste est confondante et vaut bien notre aptitude à reconnaître un visage familier parmi plusieurs centaines de milliers d'autres. Cette aptitude se fonde sur une reconnaissance globale dont le mécanisme échappe largement à l'analyse. La complexité a elle aussi été sous-estimée et l'approche « réductionniste » de la biologie, si elle a démontré son efficacité dans l'analyse des processus chimiques et physiques élémentaires du vivant, est complètement incapable de résoudre ni même d'aborder des questions aussi complexes que l'édification d'un organisme et la différenciation de ses tissus, le cheminement de la pensée et les mécanismes de prise de décision, le fonctionnement d'un écosystème, ou l'Évolution biologique.

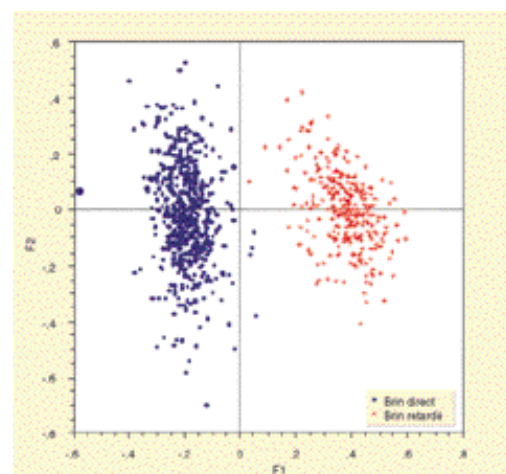
Approche mathématique de la diversité

L'apport des statistiques et des probabilités est considérable. La statistique descriptive fournit une représentation de cette diversité. La statistique inférentielle permet une seconde démarche : quelle probabilité a un objet d'appartenir à un ensemble donné ? Quelle est la probabilité que tel effet résulte de telle cause, que telle cause entraîne tel effet ? Quelle est la probabilité que tel phénomène se produise à nouveau (ou se soit déjà produit) ? Quelle est la probabilité que l'objet ou le système biologique évolue de telle manière ? etc. Cet apport des mathématiques est essentiel au plan méthodologique, puisqu'il permet de quantifier l'incertitude, de calculer la probabilité d'erreur associée à l'acceptation ou au rejet d'une hypothèse. Il introduit en outre une dialectique probabiliste qui exclut la certitude et accepte l'incertitude.

Approche mathématique de la complexité

Description d'abord : qu'il s'agisse de formes, de systèmes, de processus, les mathématiques rendent possible une description globale, non exhaustive, qui fait émerger des structures, des organisations, des règles masquées sous la diversité. Cette description n'est pas neutre : elle introduit une hiérarchie dans la diversité et fournit les prémisses d'une interprétation et d'une

* Un illustre drosophiliste américain a résumé ainsi le problème : « do as you want, flies do as they want ! » : « Faites comme vous voulez, les mouches n'en feront qu'à leur tête ! ».



Analyse factorielle des correspondances réalisée sur la composition en codons des gènes de la bactérie *Borrelia burgdorferi* (responsable de la maladie de Lyme). Cette analyse a été effectuée sur l'ensemble des gènes de cet organisme, dont le génome complet a été séquencé en 1997. La nette séparation des gènes codés sur le brin direct de ceux sur le brin retardé du chromosome montre qu'il existe des biais dans la composition en codons qui sont liés à la simple localisation sur le chromosome. Ces biais sont liés à l'existence de mécanismes de réplication différents pour le brin direct et le brin retardé.

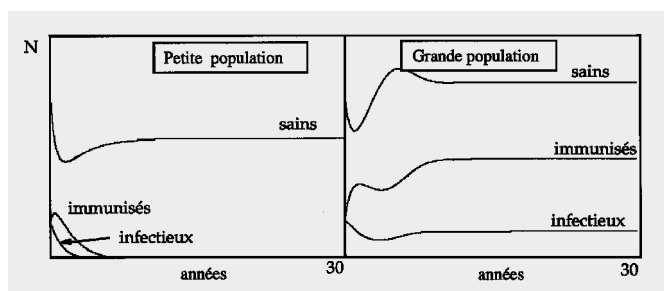
compréhension de la complexité. *Analyse* ensuite : analyser un système biologique (dans sa forme, ses fonctions, son évolution), c'est comprendre son organisation et ses relations avec l'extérieur. C'est proposer une structuration en sous-systèmes suffisamment simples pour se prêter à l'analyse, c'est-à-dire dont les règles d'organisation et de fonctionnement sont accessibles et peuvent être formalisées. Le problème majeur reste celui des interactions entre ces sous-systèmes : à quelles échelles se placent-ils ? Quelles dépendances, quelles coordinations les unissent ? Quelles régulations assurent le fonctionnement global, quelle est la part du hasard dans leurs relations ? *Représentation* enfin : à partir de l'analyse du vivant, il faut en construire une représentation qui le résume à ses structures et à ses règles essentielles, et qui propose des modèles formalisés d'organisation et d'évolution. Ces modèles théoriques peuvent être considérés comme trop simplistes, puisqu'ils excluent une bonne partie de la variabilité, mais c'est ce qui leur donne leur valeur heuristique. Seule la confrontation de ces modèles aux réalités biologiques qu'ils sont censés représenter permet de les valider et d'accepter les hypothèses et les règles sur lesquelles ils sont construits.

Dans cette démarche devenue classique en biologie, les mathématiques dépassent le statut d'outil pour participer directement à la conceptualisation et à la théorisation du système vivant. Le contenu théorique de la biologie, qui a longtemps manqué, a pris de la consistance au point qu'il est aujourd'hui incontournable. Une «biologie théorique» s'est peu à peu développée qui, comme toutes les théories scientifiques, est constamment à l'épreuve des faits et sujette à contestation, révision ou rejet. Elle a l'immense mérite de fournir une explication plausible du vivant et de proposer de nouvelles approches expérimentales. Elle permet aussi d'intégrer la dimension temporelle et autorise des prédictions, avec toujours une part d'incertitude d'autant plus grande que le système est plus complexe ou que l'échelle de temps est plus longue. Ainsi sait-on prévoir avec une bonne précision l'action d'une drogue sur un organisme, la croissance d'un arbre planté dans un milieu précis ou la propagation d'une épidémie dans une population (gestion médicale, paysagère ou épidémiologique). En revanche, l'évolution d'un écosystème, les conséquences du réchauffement planétaire, l'évolution des espèces sont des processus plus complexes, moins maîtrisés, qui laissent une part plus large au hasard, c'est-à-dire à un ensemble de facteurs non identifiés et le plus souvent non contrôlés.

Les connaissances en biologie doivent leur progrès aux emprunts technologiques et conceptuels à la chimie et à la physique et à l'explosion parallèle des moyens de calcul. Mais les mathématiques peuvent-elles «embrasser» plus encore la biologie ? Il n'y a pas lieu de prévoir un ralentissement prochain des progrès en biologie, ni en informatique. L'incertain étant ce qui échappe à l'analyse et à la représentation rationnelles, on peut prévoir que la part de l'incertain est appelée à diminuer en biologie, et qu'une partie au moins de la discipline rejoindra les sciences «exactes». La physique et la chimie, depuis longtemps, ont adopté une attitude probabiliste devant les déplacements aléatoires de particules ou de molécules et sont amenées maintenant à prendre en compte le rôle d'un ensemble de facteurs non identifiés et plus ou moins contrôlés, ce qui finalement les rapproche de la biologie. Il reste que la complexité des systèmes biologiques croît bien plus vite que leur taille et que l'échelle temporelle sur laquelle on les considère. Le champ des mathématiques en biologie est donc largement ouvert et on peut en attendre des progrès décisifs dans la compréhension et la gestion des grands systèmes biologiques.

Références :

- Lobry J. R. et Lobry C. (1999). Evolution of DNA base composition under no-strand-bias conditions when the substitution rates are not constant. *Molecular Biology and Evolution*, 16 (6) : pp.719-723.
- Fromont E., Pontier D., Langlais M. 1998. Dynamics of a feline retrovirus (FeLV) in host populations with variable spatial structure. *Proceedings of the Royal Society of London B* 265, pp. 1097-1104.



Modèle de propagation de l'infection par le Virus Leucémogène Félin dans des populations de chats domestiques. Ce rétrovirus, à l'origine d'un syndrome d'immunodépression, est la première cause de mortalité non traumatique chez le chat domestique. Le modèle vise à tester l'influence de la taille de la population sur la dynamique de l'infection. Dans une population dont l'effectif est fortement limité par les ressources (à gauche) l'infection s'éteint spontanément au bout de quelques années. Dans une population d'effectif élevé (à droite) et sous les mêmes conditions, l'infection persiste et devient endémique.

Contact chercheur :
Michel BOULETTEAU.
 Biométrie et biologie évolutive,
 CNRS-Université Lyon 1,
 mél : boulet@
 biomserv.univ-lyon1.fr
<http://biomserv.univ-lyon1.fr>

Contact département
 des sciences de la vie du CNRS :
 Thierry PILORGE,
 tél. : 01 44 96 40 26
 mél : thierry.pilorge@cnrs-dir.fr

A, T, G, C : UNE SIMULATION MOLÉCULAIRE POUR QUELQUES BASES D'ADN

La physico-chimie in silico des macromolécules biologiques

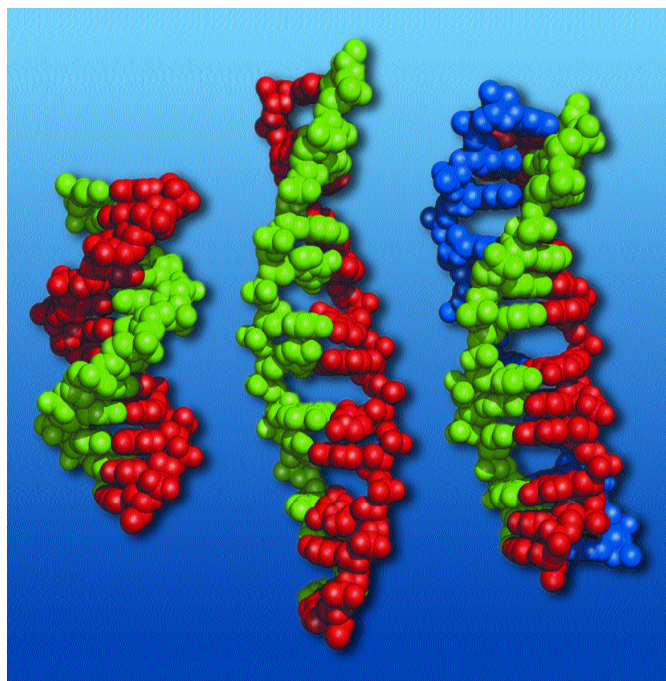
***In vivo, in vitro, in silico* - passage du vivant au tube à essai et à l'ordinateur -, voici le chemin qui permet aux chimistes théoriciens de compléter les expériences du laboratoire avec des expériences numériques effectuées à l'aide d'équations et de la puissance croissante des microprocesseurs. De telles « expériences » peuvent répondre à de nombreuses questions concernant le monde moléculaire dès lors que leur précision est adaptée au processus considéré.**

Au niveau le plus fin se situe la chimie proprement dite. La compréhension d'une réaction chimique nécessite un suivi indépendant des électrons et des noyaux atomiques et exige l'emploi de la mécanique quantique. S'il s'agit plutôt de comprendre les changements de conformation moléculaire, il est possible de se tourner vers la mécanique classique de Newton. Ce choix permet d'aborder la simulation de systèmes beaucoup plus grands (contenant souvent des dizaines de milliers d'atomes), de tenir compte des effets du solvant et de simuler la dynamique sur différentes échelles de temps.

S'ouvre alors une fenêtre sur le monde vivant dont les briques élémentaires sont les biopolymères : acides nucléiques, protéines et polysaccharides. Le plus connu des acides nucléiques, la double hélice d'ADN, siège de l'information génétique, fournit un bon exemple de ce que la simulation moléculaire peut accomplir. Pour commencer, elle permet un niveau de contrôle souvent inaccessible à l'expérimentateur. Ainsi, bien que les bases d'ADN, adénine (A), thymine (T), guanine (G) et cytosine (C) interagissent dans l'eau en s'empilant, les simulations de dynamique moléculaire permettent de contrer ses interactions et d'étudier la formation des paires A-T et G-C, appariées par liaisons hydrogène comme au sein de la double hélice. Il est alors possible de calculer leur énergie libre d'appariement, une grandeur inaccessible expérimentalement.

On peut aussi employer les simulations pour étudier le comportement de la double hélice elle-même. Il s'avère que l'ADN est une molécule remarquablement flexible. Les expériences physiques menées sur des molécules uniques d'ADN ont permis de montrer qu'il est possible de l'étirer par un facteur d'environ 2 ou de la tordre d'un facteur 5 sans la casser. En simulant ces « contorsions » moléculaires, on peut visualiser l'effet des déformations, aboutissant ainsi aux nouvelles structures portant désormais les noms ADN-S et ADN-P.

Ces résultats ont un intérêt biologique puisque, dans son environnement naturel, l'ADN est en interaction permanente avec des protéines, également capables de lui imposer des déformations. De telles déformations sont même indispensables pour assurer la lecture de l'information génétique, sa duplication et son empaquetage au sein de la cellule. Pour prendre un exemple, la protéine RecA joue un rôle important dans le processus de recombinaison qui permet d'intervertir des segments dans un génome. Son action, qui implique l'échange de brins entre deux doubles hélices ayant des séquences homologues, provoque l'étirement de ces hélices par un facteur 1,5. La connaissance de la forme ADN-S a permis de proposer un mécanisme pour l'échange des brins qui est en accord avec la somme des informations expérimentales.

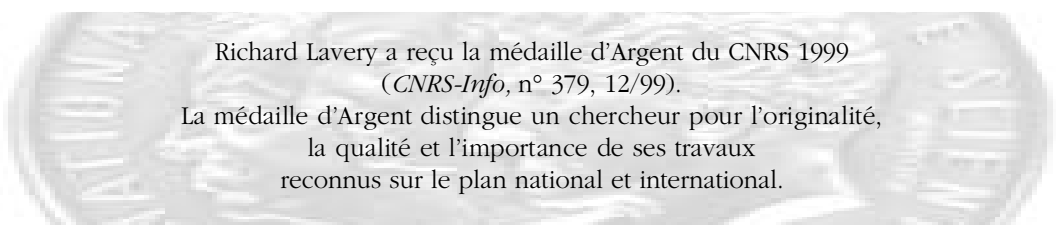


Trois formes d'ADN : (de gauche à droite) la double hélice de Watson et Crick (ADN-B), la double hélice étirée d'un facteur 1,5 (ADN-S), et la triple hélice susceptible de jouer un rôle dans l'échange de brins de l'ADN, formée par l'interaction d'un simple brin (en bleu) dans le petit sillon de la double hélice étirée.

Il reste à développer des simulations qui permettront d'étudier systématiquement les effets subtils de la séquence de bases sur le comportement et les interactions de l'ADN, et qui ouvriront une nouvelle fenêtre sur l'information contenue dans les bibliothèques grandissantes d'information génomique.

Références :

- G. Bertucat, R. Lavery, C. Prevost. A molecular model for RecA-promoted strand exchange via parallel triple-stranded helices. *Biophys. J.* 77 (1999) pp. 1562-1576.
- E. Stofer, C. Chipot and R. Lavery. Free energy calculations of Watson-Crick base pairing in aqueous solution. *J. Am. Chem. Soc.* 121 (1999) pp. 9503-9508.
- J.-F. Allemand, D. Bensimon, R. Lavery, V. Croquette. Stretched and overwound DNA forms a Pauling-like structure with exposed bases. *Proc. Natl. Acad. Sci. (USA)* 95 (1998) pp. 14152-14157.
- P. Cluzel, A. Lebrun, C. Heller, R. Lavery, J.-L. Viovy, D. Chatenay, F. Caron. DNA : an extensible molecule. *Science* 271 (1996) pp. 792-794.



Richard Lavery a reçu la médaille d'Argent du CNRS 1999
(*CNRS-Info*, n° 379, 12/99).

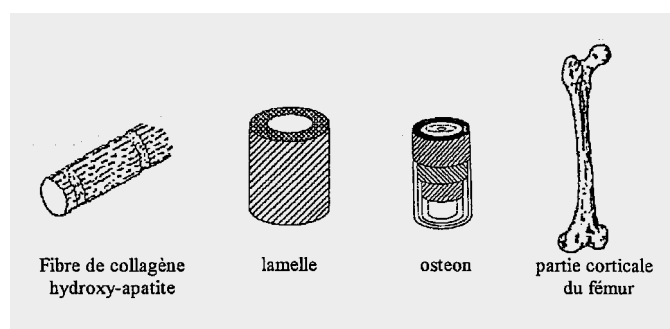
La médaille d'Argent distingue un chercheur pour l'originalité,
la qualité et l'importance de ses travaux
reconnus sur le plan national et international.

Contact chercheur :
Richard LAVERY.
Laboratoire de biochimie
théorique,
CNRS- Institut de biologie
physico-chimique (IBPC),
mél : rlavery@ibpc.fr
<http://www.ibpc.fr/UPR9080>

Contact département
des sciences chimiques du CNRS :
Laurence MORDENTI,
tél. : 01 44 96 41 09
mél : laurence.mordenti@
cnrs-dir.fr

COMPRENDRE LE COMPORTEMENT MÉCANIQUE DE L'OS HUMAIN GRÂCE AU CALCUL SCIENTIFIQUE

L'os humain est un matériau vivant en perpétuelle évolution. Il sait s'adapter aux sollicitations auxquelles il est soumis. Sa morphologie se transforme avec l'âge : changement de masse lors de la croissance, d'architecture et de propriétés mécaniques lors du remodelage (consolidation d'une fracture). Quelle est sa structure optimale ? Comment décrire son comportement mécanique et son adaptation fonctionnelle ? Quel est le mécanisme du remodelage osseux ? Est-il possible de prévoir les pathologies ? Des outils mathématiques ont été développés depuis une dizaine d'années pour apporter des éléments de réponse, notamment sur le comportement mécanique de ce matériau adaptatif.



Recomposition architecturale de l'os cortical lors des trois phases d'homogénéisation.

architecture complexe : des cylindres creux – les ostéons – sont juxtaposés et scellés par une matrice. Ils se constituent en un assemblage de lamelles cylindriques emboîtées les unes dans les autres. Chaque lamelle est formée d'un réseau de fibres de collagène enroulées hélicoïdalement et insérées dans des cristaux d'hydroxy-apatite. Le principe de destruction et de reconstruction de cet os est connu : des cellules creusent des galeries, d'autres cellules y apposent un tissu qui se minéralise peu à peu pour former un nouvel ostéon. Si de nouvelles directions d'ostéons apparaissent, alors les propriétés mécaniques sont modifiées.

Les biomécaniciens savent mesurer les caractéristiques physiques des composants élémentaires (collagène et hydroxy-apatite) et les orthopédistes ont besoin de connaître les champs de déformations ou de contraintes dans le fémur entier. Un calcul de structure ne peut déterminer de tels champs. Il faut donc estimer des caractéristiques physiques « moyennes » de ce matériau. La théorie mathématique de l'homogénéisation développée dans les années 1970 est le premier outil qui a été utilisé, après adaptation, pour déterminer ces caractéristiques. Etant donné un matériau composite à structure périodique et connaissant les caractéristiques physiques des composants élémentaires, on détermine les caractéristiques physiques d'un matériau fictif ayant la même géométrie et les mêmes propriétés mécaniques macroscopiques que le matériau étudié. Cette technique est meilleure que les techniques de *moyennage* classiques (calcul de quantités statistiques moyennes) car elle prend en compte l'organisation architecturale du milieu. De plus, elle permet un retour à une information microscopique à partir d'une information macroscopique.

Une seconde étude d'homogénéisation prenant en compte le fluide visqueux s'écoulant dans les divers canaux de l'os a permis de montrer que l'os se comportait comme un matériau visco-élastique à mémoire longue. La modélisation utilisée est satisfaisante du point de vue du comportement mécanique, mais n'explique pas le remodelage osseux. Comment les sels minéraux sont-ils transportés à travers le tissu osseux et comment arrivent-ils dans le tissu non minéralisé fabriqué par les cellules chargées de la reconstruction de l'os ? Ce matériau est actuellement considéré comme un milieu poreux, siège de deux phénomènes : l'écoulement d'un fluide et le transport de plusieurs solutés. Les simulations numériques effectuées à ce jour ne donnent

Sur le plan mécanique, l'os est un milieu fortement hétérogène à trois niveaux structurels et à trois échelles d'espace distinctes. Une coupe transversale, effectuée dans la partie médiane d'un os long comme le fémur, permet de distinguer, du centre vers l'extérieur : la moelle, l'os spongieux et l'os cortical. L'analyse microscopique met en évidence une

• Parmi les ouvrages les plus importants, on peut citer ceux de Ascenzi (dont les premiers articles datent de 1967), ceux de Katz (de nombreux articles écrits depuis 1971) et aussi un livre de synthèse publié par Park en 1979.

• Les cylindres s'appellent les ostéons, le trou interne le canal de Havers et la matrice le système interstitiel.

pas des résultats suffisamment corrélés aux observations expérimentales. Cette différence est liée, soit à la simulation numérique elle-même (la difficulté majeure étant de déterminer des paramètres que les biomécaniciens ne savent pas encore mesurer), soit à un processus physique non pris en compte jusqu'à présent.

Le calcul scientifique a permis de mieux comprendre le comportement mécanique de ce matériau fort complexe qu'est l'os. Son apport pour les biomécaniciens est indéniable et contribue à une meilleure compréhension des processus régissant le remodelage osseux. De nombreux développements sont encore à mettre en œuvre ou même à concevoir. Une question fondamentale reste posée : quel est le processus de transmission de l'information entre échelle macroscopique (l'os) et échelle microscopique (la cellule) ?

Référence :

- Crolet J.-M., Aoubiza B. and Meunier A. Compact bone : Numerical simulation of mechanical characteristics. *J. of Biomechanics*. Vol. 26, n° 6, pp. 677-687, 1993.

Contact chercheur :
Jean-Marie CROLET.
Équipe de mathématiques
de Besançon,
CNRS-Université de Besançon,
mél : jmcrolet@univ-fcomte.fr
<http://pegase.univ-fcomte.fr>

Contact département
des sciences physiques
et mathématiques du CNRS :
Frédérique LAUBENHEIMER,
tél. : 01 44 96 42 63
mél : [frederique.laubenheimer@](mailto:frederique.laubenheimer@cnrs-dir.fr)
cnrs-dir.fr

MODÉLISER L'INTELLIGENCE COLLECTIVE DES INSECTES SOCIAUX

Dans le règne animal, les sociétés d'insectes sont sans doute les créatures chez lesquelles on rencontre les formes d'organisation les plus complexes et qui construisent également les structures les plus élaborées. Ces sociétés possèdent en outre tout un ensemble de propriétés très intéressantes, en particulier lorsqu'on les observe du point de vue de l'ingénieur ou du chercheur en optimisation : elles sont en effet capables d'accomplir des tâches difficiles et complexes, dans des environnements dynamiques et variés, et ceci sans pilotage ni contrôle externes et sans coordination centrale.



La compréhension que nous avons aujourd'hui des performances collectives des colonies d'insectes est en grande partie la conséquence du développement des modélisations mathématiques et simulations informatiques dans ce domaine. La réalisation dans un second temps d'algorithmes* distribués, permettant dans le domaine artificiel de résoudre certains problèmes bien définis sur la base de principes similaires à ceux utilisés par les insectes sociaux pour coordonner leurs activités, constitue une autre conséquence inattendue mais importante de l'utilisation des mathématiques et de l'outil informatique dans l'étude de ces phénomènes. Ces applications potentielles ont entraîné à leur tour un regain d'intérêt pour l'étude des insectes sociaux.

Ces dernières années de nombreux travaux ont mis en évidence des mécanismes auto-organisés au cœur des phénomènes de coordination collective dans les sociétés d'insectes. L'auto-organisation caractérise la capacité d'un système à s'organiser à partir d'une multitude d'interactions entre ses éléments constitutifs par amplification de fluctuations** ; elle représente un principe explicatif puissant pour un certain nombre de phénomènes collectifs (agrégation, synchronisation, mouvements collectifs, formation de bivouacs et de ponts, thermorégulation, construction et plus généralement structuration de l'espace, affouagement***, genèse hiérarchique, division du travail, etc.), observés chez les insectes sociaux. Ce principe explicatif, permet de montrer que la complexité des structures produites collectivement ne résulte pas nécessairement d'une complexité comportementale et cognitive au niveau individuel mais qu'elle peut spontanément émerger à partir d'interactions entre des individus relativement « simples ».

L'un des buts de l'intelligence collective est la conception de systèmes artificiels adaptatifs, décentralisés, flexibles et robustes inspirés des insectes sociaux et qui soient capables de résoudre des problèmes. Pour atteindre ce but, il est nécessaire de comprendre les mécanismes qui produisent les comportements collectifs. Dans cette étape la modélisation joue un rôle essentiel : elle nous permet de comprendre le lien existant entre les capacités individuelles et les performances collectives d'une colonie. La modélisation constitue également l'interface grâce à laquelle des méthodes générales de résolution distribuée de problèmes mises en œuvre par les colonies d'insectes, peuvent être transposées, moyennant des modifications appropriées, dans le cadre de la conception de systèmes artificiels, notamment en informatique et en micro-robotique.

Références :

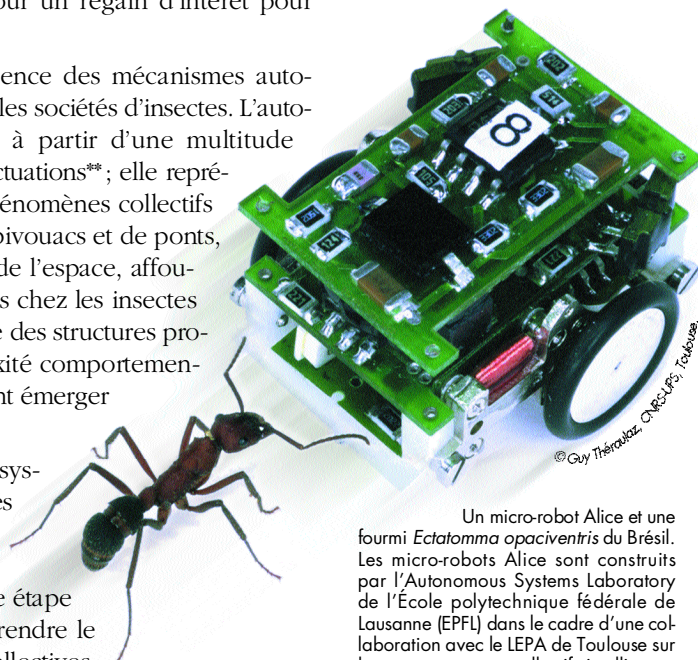
- Bonabeau, E. and Theraulaz, G. (1994). *Intelligence Collective*. Hermès, Paris, 288 p.
- Bonabeau, E., Theraulaz, G. and Dorigo, M. (1999). *From Natural to Artificial Swarm Intelligence*. Oxford University Press, New-York.
- CNRS-Info, n° 339, 15/03/97.

Guy Theraulaz a une formation initiale de biologiste (en neurosciences et éthologie) qu'il a complétée par une spécialisation en mathématiques et physique des phénomènes non-linéaires.

* Un algorithme sert à la conception, l'évaluation et l'optimisation des méthodes de calcul en mathématiques et en informatique. Il consiste en la spécification d'un schéma de calcul, sous forme d'une suite d'opérations élémentaires obéissant à un enchaînement déterminé. Il désigne la méthodologie suivie par un programme.

** Certaines hétérogénéités sont amplifiées sous l'action combinée de processus qui résultent, comme chez les insectes sociaux, de l'action de l'ensemble des insectes. Par exemple, le marquage d'une piste chimique dans une direction sera renforcé par l'action résultante du marquage des fourmis qui vont emprunter cette piste.

*** Récolte collective de nourriture.



Un micro-robot Alice et une fourmi *Ecatomma opaciventris* du Brésil. Les micro-robots Alice sont construits par l'Autonomous Systems Laboratory de l'École polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL) dans le cadre d'une collaboration avec le LEPA de Toulouse sur les comportements collectifs intelligents.

Contact chercheur :
Guy THÉRAULAZ.

Laboratoire d'éthologie
et psychologie animale (LEPA),
CNRS-Université Toulouse 3,
mél : theraula@cict.fr

Contact département
des sciences de la vie du CNRS :
Thierry PILORGE,
tél. : 01 44 96 40 26
mél : thierry.pilorge@cnrs-dir.fr

L'ÉCOLOGIE MATHÉMATIQUE

L'état d'avancement des sciences de la vie est-il dû peu ou prou aux mathématiques ? L'« ère génomique » que nous traversons est plus que jamais marquée par une pratique effrénée d'accumulation de faits et de déduction qualitative. Pourtant, le séquençage des biomolécules et la description des mécanismes régissant leurs interactions ne suffiront plus à résoudre le problème global de l'origine et du maintien de la biodiversité. Cette question fondamentale de la biologie contemporaine se pose à tous les niveaux d'organisation du vivant, du gène à l'écosystème, en mettant en jeu des *populations* en interaction : répliqueurs organiques en concurrence pour les ressources chimiques du milieu, particules virales et cellules immunes s'affrontant au sein d'organismes plus complexes ; groupes d'individus sociaux constamment mis au défi par l'attaque d'organismes parasites ; communautés autochtones secouées par l'introduction d'espèces invasives. Cette structure *organismes-environnement* qui constitue l'« objet écologique » se retrouve à tous les niveaux du vivant. Pour comprendre la dynamique d'un système de populations en interaction dans un environnement lui-même changeant, la description réductionniste et l'argumentation verbale ne suffisent plus. Un cadre théorique, mathématique, devient indispensable à l'interprétation des faits et à l'exploration de phénomènes écologiques sur des échelles de temps et d'espace d'accès expérimental difficile.

Coexister dans le temps et dans l'espace

Les principes de l'assemblage des communautés d'espèces, soumis aux règles de la concurrence, de la prédation, du parasitisme et du mutualisme, sont aujourd'hui entièrement repensés. Les équations différentielles de Lotka et Volterra ne peuvent décrire l'interaction de populations qu'« en moyenne » sur l'espace occupé. Leur simplicité, certes séduisante, occulte les effets souvent considérables de la localisation géographique précise des individus et de leur mobilité. Fluctuations locales et corrélations spatiales ne sauraient plus être négligées pour énoncer les règles de la coexistence et de l'exclusion des populations naturelles. La description mathématique de populations en interaction s'élabore désormais à partir de principes démographiques de base, opérant à l'échelle individuelle et locale, pour parvenir à une description « macroscopique » dont les variables se définissent dans le temps et dans l'espace. Toute la difficulté mathématique tient à ce « changement d'échelle » dans la description du système. Si les modèles de la physique peuvent aider à l'abord du problème, les analogies se révèlent vite insuffisantes et le biologiste théoricien ne peut se dispenser de mettre au point les concepts et techniques mathématiques propres à son objet d'étude.

Des interactions écologiques à l'origine des espèces

Au cours des dix dernières années, des travaux expérimentaux d'importance majeure ont fait tomber le mythe qui plaçait les processus de l'écologie et de l'évolution sur des échelles de temps quasi incommensurables. Qu'il s'agisse d'oiseaux, de poissons ou de lézards, quelques générations suffisent pour qu'une population réponde à la modification de son environnement par un changement « héritable », codé génétiquement, de la morphologie ou de la démographie des individus. C'est dans ce contexte empirique que la théorie des « dynamiques adaptatives » a vu le jour au début des années 1990. Le processus de l'évolution darwinienne y est décrit comme une marche aléatoire sur l'ensemble des phénotypes, dont chaque pas est gouverné par l'écologie du système. Cette approche se distingue de la génétique des populations classiques où la valeur sélective est une fonction donnée d'avance. Ici, la valeur sélective d'un phénotype mutant est déterminée par la capacité d'invasion de ce phénotype dans la population établie. Les pressions de sélection, d'origine écologique, se modifient donc à mesure que la population évolue. L'une des prédictions les plus spectaculaires de cette théorie concerne l'origine des espèces (figure 1) : l'interaction des processus écologiques et évolutifs peut conduire une population à se différencier en plusieurs espèces, sans l'intervention des facteurs extérieurs traditionnellement invoqués, comme l'isolement géographique de populations locales.

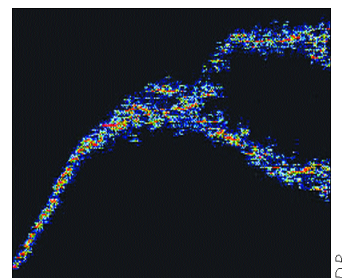


Figure 1 : simulation de la dynamique adaptative d'un trait morphologique quantitatif, par exemple la taille corporelle à l'âge adulte. Le temps est en abscisse, le trait en ordonnée. La couleur code la fréquence de la valeur du trait à chaque instant, du rouge (haute fréquence) au bleu (basse fréquence). Sous l'effet de pressions de sélection induites par l'écologie du système, la dynamique adaptative converge dans une première phase vers un point de ramification, à partir duquel deux espèces se différencient.

Vers de nouvelles mathématiques

La théorie des dynamiques adaptatives s'inscrit dans la descendance directe des applications de la théorie des jeux à la biologie. Mais les notions de stabilité sont bien distinctes des concepts classiques et propres à la motivation biologique sous-jacente. Les modèles d'interactions spatialisées évoqués plus haut engendrent eux aussi de nouvelles classes d'équations aux dérivées partielles, simples dans leur formulation et riches dans leurs propriétés. Dans ce contexte spatial, la définition et la mesure de la valeur sélective d'un phénotype peut se ramener à l'étude de la dynamique de populations organisées en spirales complexes (figure 2). Ce ne sont là que quelques exemples récents qui suggèrent la grande fertilité de l'écologie en métaphores et problèmes mathématiques inédits.

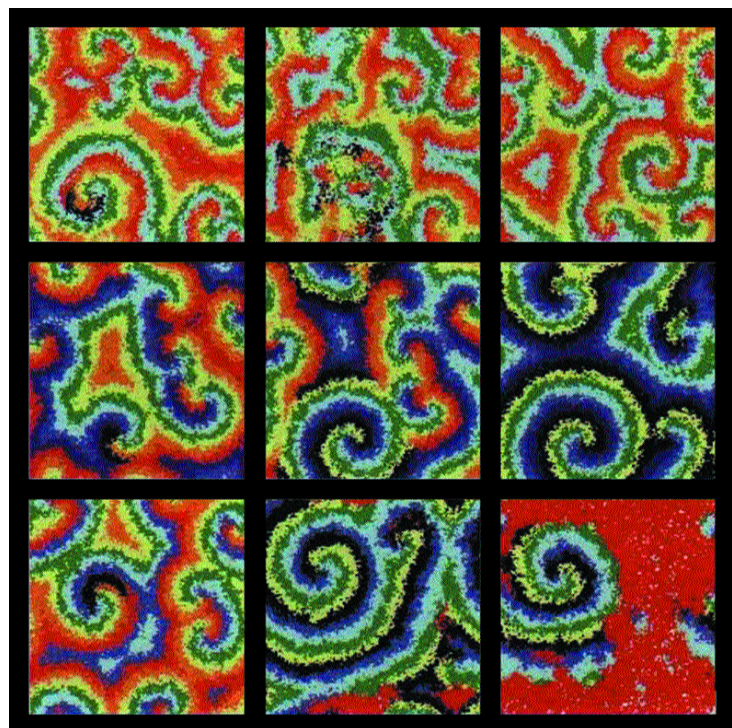


Figure 2 : distribution spatiale en spirales de six espèces (une couleur par espèce) interagissant selon une chaîne mutualiste (l'espèce 1 aide l'espèce 2 qui aide l'espèce 3, etc.) et mises en présence d'une espèce parasite (qui exploite l'aide d'une espèce sans apporter d'aide en retour; en noir). La résistance de la communauté des six espèces à l'invasion par le parasite dépend de la vitesse de rotation des spirales qui structurent la distribution de chaque espèce, et du lieu d'introduction du parasite. Chaque ligne montre trois images instantanées d'une même communauté : sur la première ligne, le parasite est éliminé ; sur la deuxième ligne, le parasite coexiste avec quatre espèces ; sur la dernière ligne, le parasite déstabilise l'ensemble de la communauté.

Contact chercheur :
Régis FERRIERE.

Groupe d'éco-évolution mathématique, laboratoire d'écologie, CNRS-Université Paris 6-ENS,
mél : rferrier@hall.snv.jussieu.fr
<http://www.biologie.ens.fr/fr/ecologie/accueil.html>

Contact département des sciences de la vie du CNRS :
Thierry PILORGE,
tél. : 01 44 96 40 26
mél : thierry.pilorge@cnrs-dir.fr

SÉCURITÉ DES LOGICIELS

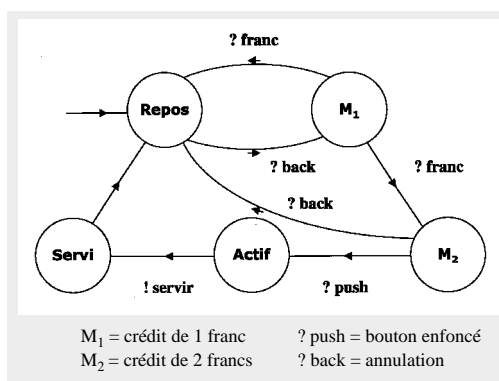
Méthodes formelles de vérification

De plus en plus de décisions, d'opérations de contrôle, de calculs, sont effectués par les ordinateurs. Aujourd'hui, les machines assurent en grande partie le contrôle des centrales nucléaires, le pilotage des fusées et des avions, surveillent les automatismes dans les transports terrestres. À l'heure du développement du commerce électronique, une erreur dans la puce d'une carte bancaire ou dans le protocole de transmission de données confidentielles peut avoir des répercussions inquiétantes (violation de secrets et piratages). Une erreur, même infime, peut avoir des conséquences catastrophiques* tant humaines que financières. Il devient donc nécessaire d'accroître notre confiance dans les programmes utilisés.

Comment être sûr des logiciels critiques ? Une des solutions pour accroître notre confiance est la vérification formelle. L'idée est simple : à partir d'un programme et d'une propriété souhaitée de ce programme, il faut prouver mécaniquement que le programme satisfait la propriété voulue. Les démonstrations, très longues et répétitives, sont presque toujours hors de portée d'un humain non assisté par une machine. La mécanisation des preuves permet d'assurer que la preuve a été aussi effectuée dans tous ses détails.

La preuve de propriétés de programmes n'est possible qu'à partir de spécifications rigoureuses. Le programme lui-même doit être écrit dans un formalisme (syntaxe) dont la signification mathématique (sémantique) est formellement définie. C'est rarement le cas pour les langages de programmation les plus utilisés (C, C++ ou Java). Des langages comme Caml** possèdent des fondements mathématiques plus sûrs. Mais on se heurte alors à un autre obstacle : la complexité de la recherche des preuves. On peut démontrer qu'il n'existe aucun programme capable, étant donné un programme et une propriété, de fournir systématiquement une réponse « oui » si le programme satisfait la propriété, et « non » dans le cas contraire (il s'agit du concept d'indécidabilité de Turing, Post, Gödel, Church, 1930-1940). Deux approches sont envisageables : renoncer à l'automatisation complète et accepter des preuves assistées par ordinateur, mais entièrement contrôlables par les machines ; ou restreindre la famille des programmes que l'on veut vérifier.

Nous opterons ici pour la deuxième solution en nous intéressant à la vérification de systèmes réactifs simples. Un système réactif reçoit des messages de son environnement, en fonction desquels il évolue. On suppose – même si cette hypothèse est bien sûr excessive – qu'il ne s'arrête jamais. Par exemple, un distributeur de café (ou de billets de banque) est un système réactif. Une version simplifiée d'un tel distributeur de café est représentée sur la figure. Il s'agit d'un automate, une structure finie dont les éléments sont appelés *états* (repos, M_1 , M_2 , Actif, Servi) et sur laquelle agissent des *actions*.



Une machine à café très simple.

* Un exemple récent en France : l'accident survenu lors du premier tir d'Ariane 5 (4 juin 1996).

** Langage développé à l'INRIA et utilisé dans les classes préparatoires aux grandes écoles.

et sur laquelle agissent des *actions*. Les actions sont les *émissions de messages* représentées par des mots précédés de (!) et les réceptions figurées par des mots précédés de (?). Si une action imprévue se produit, on décide par convention qu'il n'y a pas de changement d'état. Bien sûr, un tel automate ne fonctionne pas seul. Il faut aussi modéliser les comportements possibles de l'environnement et les échanges de messages. La question est donc maintenant : « Étant donné un automate A (ou réseau d'automates), et un énoncé 0, comment peut-on mécaniquement vérifier que A satisfait 0 ? ».

Un théorème fondateur

Dès la fin des années 1950, plusieurs mathématiciens, à la suite d'Alonzo Church, se sont intéressés aux fonctions qui pouvaient être calculées par des circuits simples, ainsi qu'aux énoncés qui pouvaient être automatiquement vérifiés sur ces circuits. Le théorème de Büchi établit que les séquences d'exécution qui sont définissables en logique monadique de second ordre sont exactement celles qui sont acceptées par un automate fini***.

Application du théorème

Imaginons maintenant que nous voulons savoir si notre machine à café satisfait un énoncé temporel comme, par exemple : « Chaque fois que j'ai introduit deux francs, je suis ou remboursé ou servi ». Cet énoncé doit être formalisé. Il faut alors choisir une définition pour le temps. Le modèle le plus simple du temps est celui des entiers naturels : on numérote les événements successifs dans l'ordre de leur apparition, sans s'occuper de la durée qui les sépare (c'est le choix du temps discret). De plus, à chaque date, il existe une seule date suivante (c'est le choix du temps linéaire). Dans ce cas, les énoncés temporels s'expriment facilement dans la logique monadique de second ordre : à chaque proposition correspond l'ensemble des dates auxquelles cette proposition est vraie.

Savoir si ma machine à café vérifie cette propriété se traduit donc formellement par le problème : « Est-ce que tous les comportements possibles de l'automate de la figure satisfont cette formule ? ». Mais, grâce au théorème de Büchi, il devient : « Est-ce que toutes les séquences d'événements possibles sont acceptées par l'automate correspondant à la formule ? ». Ce problème est un problème d'inclusion des séquences acceptées par des automates résolu depuis les années 1950. Les méthodes de vérification de modèles qui découlent de ces résultats sont utilisées par des logiciels de vérification en ajoutant de nombreuses astuces permettant d'effectuer les calculs le plus rapidement possible.

Le temps arborescent

Le choix des entiers naturels pour modéliser le temps n'est pas nécessairement approprié. D'autres modèles du temps ont été étudiés dont, par exemple, le temps « réel » (dans lequel, entre deux dates, il y a toujours une autre date) et le temps « arborescent ». Celui-ci rend compte du non-déterminisme : chaque date n'a plus un seul successeur, mais plusieurs. On raisonne sur tous ou certains des futurs possibles. La logique associée à cette notion de temps est la logique monadique de second ordre à plusieurs successeurs. Le théorème de M. Rabin (1969) caractérise l'ensemble des modèles de telles formules en termes d'automates d'arbres. Autrement dit, il généralise le théorème de Büchi au temps arborescent.

Les techniques de vérification ont fait l'objet de nombreuses coopérations entre les industriels et laboratoires universitaires. Hélas, ces contrats sont toujours assortis de clauses de confidentialité qui ne permet pas de faire état de toutes les erreurs trouvées dans tous les logiciels ou les circuits soumis à ces examens.

Pour en savoir plus et adresses de sites :

- *Vérification de logiciels : techniques et outils du model-checking*. Éd. Philippe Schnoebelen, collaboration Béatrice Bérard, François Laroussinie, Michel Bidoit, Antoine Petit. Éd. Vuibert, 1999, 304 p. - 199 F.
- <http://java.sun.com/people/jag/Ariane5.html>
- <http://vw.ukans.edu/cwis/units/IPPBR/pentiumfdiv/pentgrph.html>
- <http://pauillac.inria.fr/coq/presfra.html>

*** Plus précisément, les formules de cette logique pourront comporter des variables d'individu (notées x, y, z, \dots), des variables d'ensemble (notées X, Y, Z, \dots), la constante 0, l'opération successeur S ainsi que les prédicats de comparaison, $=$ et d'appartenance à un ensemble. Les variables d'individu sont interprétées par des entiers naturels alors que les variables d'ensemble sont interprétées par des sous-ensembles des entiers naturels.

Contact chercheur :
Hubert COMON.
 Laboratoire spécification
 et vérification (LSV),
 CNRS-ENS Cachan,
 mél : Hubert.Comon@lsv.ens-cachan.fr
<http://www.lsv.ens-cachan.fr>

**Contact département
 des sciences pour l'ingénieur
 du CNRS :**
Béatrice REVOL,
 tél. : 01 44 96 42 32
 mél : beatrice.revol@cnrs-dir.fr

LE CLIENT EST-IL TOUJOURS ROI ?

Théorie des jeux et économie quantitative

Sur de nombreux marchés, les acheteurs ne connaîtront la qualité du bien qu'ils acquièrent qu'après l'avoir utilisé. Des vendeurs peuvent dès lors être incités à écouler des biens de qualité basse au prix auquel sont vendus ceux de qualités élevées. Évidemment, les acheteurs sont perdants puisqu'ils payent trop cher des biens de qualité basse. Mais la collectivité est aussi perdante : des ressources mal allouées sont gaspillées.

Cet exemple met en valeur les difficultés qui surviennent lorsque des individus interagissent de manière décentralisée pour la répartition d'un surplus qu'ils génèrent en commun. Les actions n'étant pas contrôlables, même pas observables, les comportements que motive la seule recherche de l'intérêt individuel se payent d'une inefficacité collective. Personne n'est incité à prendre en considération la manière dont ses choix affectent la part du surplus collectif attribuée aux autres. En utilisant un langage venu de la pratique des assurances, on parle de « situations d'aléa moral ». La « tragédie des communs » en matière d'accès à des ressources collectives, le « passager clandestin » en matière de financement d'un bien public, le célèbre « dilemme des prisonniers » en sont d'autres exemples.

Ce sont là des situations de « jeux non coopératifs », dont la « forme normale » est le modèle mathématique le plus simple. Les participants sont des « joueurs » dont on postule qu'ils mettent en œuvre en toute indépendance des « plans d'actions » ou « stratégies ». Les « paiements » sont donnés ici par la part du surplus auquel chacun peut s'attendre dans chaque issue stratégique. Tout plan qui prescrit le comportement des joueurs - ou qui constitue une prédiction quant à l'issue susceptible de se réaliser - dans la mesure où il est compris par les joueurs et ne leur impute aucune irrationalité, doit identifier un « équilibre de Nash »¹. Il est de l'intérêt de chacun de respecter le plan dès lors que tous les autres le respectent. D'autres plans d'actions peuvent permettre le partage d'un surplus collectif plus important. Mais cela suppose une coordination incompatible avec le contexte de la « décentralisation des choix ».

La théorie des jeux suggère une direction pour étudier les corrections susceptibles d'être apportées : elle consiste à construire une « transformation coopérative » de la situation d'origine, créant un nouveau jeu dont on a la garantie qu'une issue collectivement efficace est réalisable de manière décentralisée comme équilibre de Nash. Des chercheurs du Groupement de recherche en économie quantitative d'Aix-Marseille² (GREQAM) dans le cadre d'une collaboration avec le Center for Operations Research and Econometrics à Louvain-la-Neuve³ ont étudié, pour les problèmes d'aléa moral, diverses transformations ou arrangements contractuels. Ils proposent, en même temps qu'un tour d'horizon de la littérature, un résultat général dérivé de l'observation, que l'analyse de l'introduction d'une telle transformation se ramène à la résolution d'un système d'inégalités linéaires⁴.

D'autres questions d'incitations peuvent être abordées avec les mêmes méthodes, comme c'est le cas lorsque les individus disposent « d'informations privées » nécessaires à la définition même des actions à mettre en œuvre. On parle alors de problèmes de « sélection contraire ».

Références :

- D'Aspremont C., J. Crémer, L.-A. Gérard-Varet (1999) « A Primal Approach to Bayesian Mechanism Design », Mimeo, CORE-IDEI-GREMAQ-GREQAM⁵.
- D'Aspremont C., L.-A. Gérard-Varet (1998) « Linear Methods to Enforce Partnerships under Uncertainty : an Overview », *Games and Economic Behavior*, Vol. 25, pp. 311-336.
- D'Aspremont C., L.-A. Gérard-Varet (1979) « Incentives and Incomplete Information », *Journal of Public Economics*, Vol. 11, pp. 25-45.

¹ La dénomination vient de J.-F. Nash, mathématicien américain, qui, à la suite de J. Von Neumann et O. Morgenstern, a étudié les fondements de la théorie des jeux non coopératifs. Il partage avec deux autres théoriciens des jeux, J.-C. Harsanyi et R. Selten, le prix Nobel d'économie 1994.

² CNRS-EHESS-Universités Aix-Marseille 2 et 3.

³ Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgique.

⁴ Du moins pour le cas d'ensembles finis d'actions et lorsque les résultats sont donnés par une fonction stochastique des actions mises en œuvre en privé par les joueurs.

⁵ Cette ligne de recherche fait l'objet de collaborations avec des chercheurs de l'Institut d'économie industrielle, université Toulouse 1.

Contact chercheur :
Louis-André GÉRARD-VARET.
 Groupement de recherche
 en économie quantitative
 d'Aix-Marseille (GREQAM),
 CNRS-EHESS-Universités
 Aix-Marseille 2 et 3,
 mél : lagv2@ehess.cnrs-mrs.fr
<http://ehess.cnrs-mrs.fr/GREQAM/Home.greqam.html>

**Contact département
 des sciences de l'homme
 et de la société du CNRS :**
Annick TERNIER,
 tél. : 01 44 96 43 10
 mél : annick.ternier@cnrs-dir.fr

GALERIE DE PORTRAITS

- BOLTZMANN (Ludwig)** Physicien autrichien (Vienne 1844 - Duino, Italie, 1906).
- BOUSSINESQ (Joseph)** Mathématicien français (Saint-André de Sangonis 1842 - Paris 1829).
- BÜCHI (Richard Julius)** Mathématicien (1924-1984).
- CANTOR (Georg)** Mathématicien allemand (Saint-Petersbourg 1845 - Halle 1918).
- CHAPMAN (Sydney)** Mathématicien et physicien (Eccles, Angleterre 1888 - Boulder, États-Unis 1970).
- CHURCH (Alonzo)** Logicien et philosophe américain (Washington, 1903).
- CNIDE (Eudoxe de)** Astronome, mathématicien, médecin et philosophe grec (Cnide 408 - Athènes 355 av. J.-C.).
- DEDEKIND (Richard)** Mathématicien allemand (Brunswick 1831 - id. 1916).
- DESCARTES (René)** Philosophe et savant français (La Haye, France 1596 - Stockholm 1650).
- EULER (Leonhard)** Mathématicien, physicien et astronome suisse (Bâle 1707 - Saint-Petersbourg 1783).
- FOURIER (Joseph)** Physicien et mathématicien français (Auxerre 1768 - Paris 1830), également égyptologue et haut fonctionnaire du Premier Empire.
- GÖDEL (Kurt)** Logicien et mathématicien autrichien (Brünn 1906 - Princeton 1978).
- HILBERT (David)** Mathématicien et logicien allemand (Königsberg 1862 - Göttingen 1943) dont l'œuvre a marqué l'évolution des mathématiques contemporaines.
- KEPLER (Johannes)** Astronome, mathématicien et physicien allemand (Weil, Wurtemberg, 1571 - Ratisbonne 1630).
- KOLMOGOROV (Andrei)** Mathématicien russe (Tambov, Russie 1903 - Moscou 1987).
- LAGRANGE (Joseph-Louis)** Mathématicien français d'origine italienne (Turin 1736 - Paris 1813).
- MERSENNE (Marin)** Philosophe et savant français (près d'Oizé, Maine 1588 - Paris 1648).
- NEEDHAM (Joseph)** Biochimiste et historien des sciences britannique (Londres 1900 - Cambridge 1995).
- ONSAGER (Lars)** Physicien et chimiste américain d'origine norvégienne (Oslo 1903 - Miami 1976).
- PASCAL (Blaise)** Écrivain, philosophe et mathématicien français (Clermont-Ferrand 1623 - Paris 1662).
- PEANO (Giuseppe)** Mathématicien et logicien italien (Cueno 1858 - Turin 1932).
- PRANDTL (Ludwig)** Physicien allemand (Freising, Allemagne, 1875 - Göttingen 1953).
- PYTHAGORE** Mathématicien grec (Samos v. 570 av. J.-C. - Métaponte v. 480 av. J.-C.).
- REYNOLDS (Osborne)** Physicien britannique (Belfast 1842 - Watchet, Angleterre 1912).
- RICHARDSON (Lewis-Fry)** Physicien et psychologue britannique (Newcastle upon Tyne 1881 - Kilmun, Argyll, Écosse 1953).
- RIEMANN (Georg-Friedrich-Bernhard)** Mathématicien allemand (Breselenz, Hanovre, 1826 - Selasca, sur le lac Majeur, 1866).
- ROBINSON (Julia)** Logicienne et mathématicienne américaine (Saint-Louis, Missouri 1919 - 1985).
- SCHÖNBERG (Arnold)** Compositeur américain d'origine autrichienne (Vienne 1874 - Los Angeles 1951).
- STOKES (George-Gabriel)** Physicien et mathématicien irlandais (Bornat Skreen 1819 - Cambridge 1903).
- TANIYAMA (Yukata)** Mathématicien japonais (Kisai, Japon 1927 - Tokyo 1958).
- TARSKI (Alfred)** Mathématicien et logicien américain d'origine polonaise (Varsovie 1902 - Berkeley 1983).
- TÜRING (Alan-Mathison)** Mathématicien britannique (Londres 1912 - Wilmslow 1954).
- WEBER (Anton von)** Compositeur autrichien (Vienne 1883 - Mittersill, près de Salzbourg, 1945).
- WEIL (André)** Mathématicien français (Paris 1906 - Princeton États-Unis 1998).



CNRS-INFO

3, rue Michel-Ange - 75794 Paris cedex 16 - tél. : 01 44 96 46 36 - télécopie : 01 44 96 49 29 - <http://www.cnrs.fr/presse>

• **Délégation à l'information scientifique et technique (DIST)** - **Directeur** : Jean-François Sabouret • **Bureau de l'écrit et des relations avec les médias** - **Responsable** : Jean-Louis Vinet - tél. : 01 44 96 47 23, mél. : jean-louis.vinet@cnrs-dir.fr • **CNRS-Info** - **Rédacteur en chef** : Marie Pinhas - tél. : 01 44 96 46 36 - mél. : marie.pinhas@cnrs-dir.fr • **Rédacteur en chef adjoint** : Mireille Vuillaume - tél. : 01 44 96 49 44 • **Livres** : Anne Loutrel - tél. : 01 45 07 52 64 • **Secrétaire de rédaction** : Sylvie Fowler-Causse - tél. : 01 44 96 46 51 • **Collaboration avec la rédaction** : Bruno Roulet (illustrations) • **Attachées de presse** : Stéphanie Bia - tél. : 01 44 96 43 09 - Carine Noël - tél. : 01 44 96 46 06 - Martine Hasler - tél. : 01 44 96 46 35 • **Secrétariat** : Catherine Bertin - tél. : 01 44 96 46 37 • **Toutes les photos CNRS sont disponibles à la photothèque du CNRS** - **Contact** : Marie-Odile Jacquot - tél. : 01 45 07 56 87 • **Mise en page** : service de l'imprimé du siège (Bruno Roulet) CNRS - DIST • **Assistance technique et flashage** : service de l'imprimé du siège • **Photogravure et imprimerie** : NOVAGRAPH - Saint-Denis • ISSN 0750-7550

Ce numéro « Spécial Mathématiques, mai 2000 » a été conçu, coordonné et réalisé par Marie Pinhas, rédacteur en chef de *CNRS-Info*, en collaboration avec le département des sciences physiques et mathématiques et le concours des autres départements scientifiques du CNRS.



CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
3 RUE MICHEL-ANGE 75794 PARIS CEDEX 16 • TEL. 01 44 96 40 00 • TELECOPIE 01 44 96 50 02